Grundwissen Mathematik Klasse 11

Lösungen

1.1 Definition der Ableitung, geometrische Bedeutung und Ableitung wichtiger Grundfunktionen

a) $f(x) = x^2 - x + 3$

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3 = m_t$

Gleichung der Tangente:

$y = m_t x + t$

m_t, P einsetzen ergibt:

$5 = 3 \cdot 2 + t \Rightarrow t = -1$

$t: y = 3x - 1$

b) $g(x) = \frac{1}{x} + 2$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

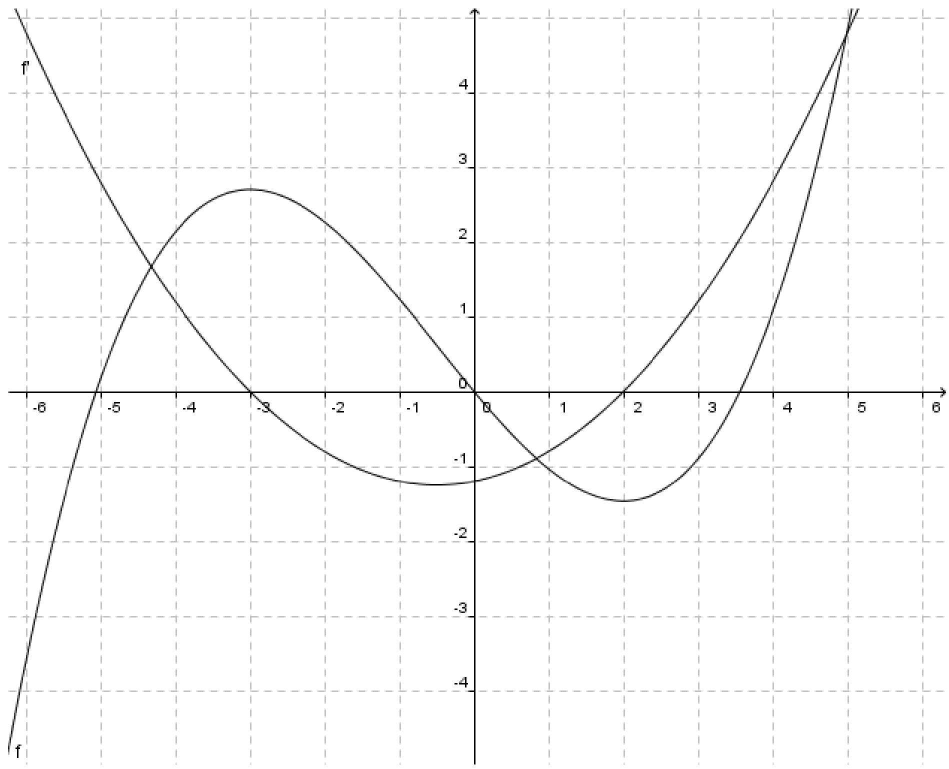
$g'(2) = -\frac{1}{4} = m_t$

$m_t \cdot m_n = -1 \Rightarrow m_n = 4$

Wie in 1.1 a) ergibt sich die Gleichung der Normalen

$n: y = 4x - 5$

c)



1.2 Allgemeine Ableitungsregeln

a) $f_1(x) = \frac{2x^2}{3x-1}$

$f_1'(x) = \frac{4x(3x-1) - 3 \cdot 2x^2}{(3x-1)^2} = \frac{12x^2 - 4x - 6x^2}{(3x-1)^2} = \frac{6x^2 - 4x}{(3x-1)^2} = \frac{2x(3x-2)}{(3x-1)^2}$

b) $f_2(x) = \cos\sqrt{3x}$

$f_2'(x) = -sin\sqrt{3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3$

c) $f_3(x) = \left(\frac{1}{5}x^5 + x^2\right)\cos(x)$

$f_3'(x) = (x^4 + 2x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \left(\frac{1}{5}x^5 + x^2\right)$

2.1 Maximaler Definitionsbereich

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x-3}$

Zähler: $x \geq 0$

Nenner: $2x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow D_1 f = \mathbb{R}_1 0^\dagger + \{3/2\}$

2.2 Symmetrie

a) $f\colon x \mapsto x^3 + 2x$

$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

b) $f\colon x \mapsto \frac{1}{8}x^2(x-2)(x+2)$

$f(-x) = \frac{1}{8([-x)]^2(-x-2)(-x+2)} = \frac{1}{8}x^2(-1)(x+2)(-1)(x-2) = f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse

2.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen; Nullstellen

a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen):

$y = f(x) = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{4}\cdot\left(-5 \pm \sqrt{25 - 4\cdot 2\cdot 2}\right) = \frac{1}{4}\cdot(-5 \pm \sqrt{9}) = \frac{1}{4}\cdot(-5 \pm 3)$

$\Rightarrow x_1 = -0{,}5;\ x_2 = -2$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$x = 0 \Rightarrow y = 2$

b) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

1.Nullstelle (erraten): $x_1 = 1$

Polynomdivision:

$(x^3 + 2x^2 - 13x + 10):(x-1) = x^2 + 3x - 10$

2./ 3. Nullstelle:

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 2; \quad x_3 = -5$

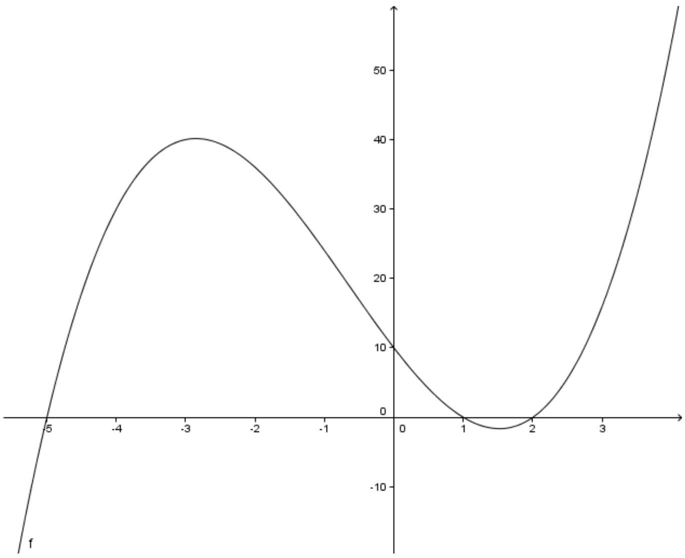
Faktorisierter Funktionsterm:

$f(x) = (x-1)(x-2)(x+5)$

Vorzeichentabelle:

	$x < -5$	$-5 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$x + 5$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
$x - 2$	-	-	-	+
$f(x)$	-	+	-	+

Skizze:



2.4 Monotonie und Extrema

Nullstellen:

$\frac{1}{4}x^4 - x^3 = 0$

$x^3\left(\frac{1}{4}x - 1\right) = 0$

$x_{1,2,3} = 0; x_4 = 4$

Extrema:

$f'(x) = x^3 - 3x^2$

Stellen mit horizontaler Tangente: $f'(x) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0$

$x^2(x - 3) = 0$

$x_{1,2} = 0; x_3 = 3$

Monotonietabelle:

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$x > 3$
x^2	+	+	+
$x - 3$	-	-	+
$f'(x)$	-	-	+
	G_f fällt monoton	G_f fällt monoton	G_f steigt monoton

$\Uparrow$ $\Uparrow$

Terrassenpunkt Minimum

(0; 0) (3; -6,75)

2.5 Krümmung und Wendepunkte

$f(x) = x^4 - 24x^2 + 5$

$f'(x) = 4x^3 - 48x$

$f''(x) = 12x^2 - 48$

$f'''(x) = 24x$

Kriterium für Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$f'''(2) = 48 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt in (2;-75)

$f'''(-2) = -48 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt in (-2;-75)

Krümmungsintervalle:

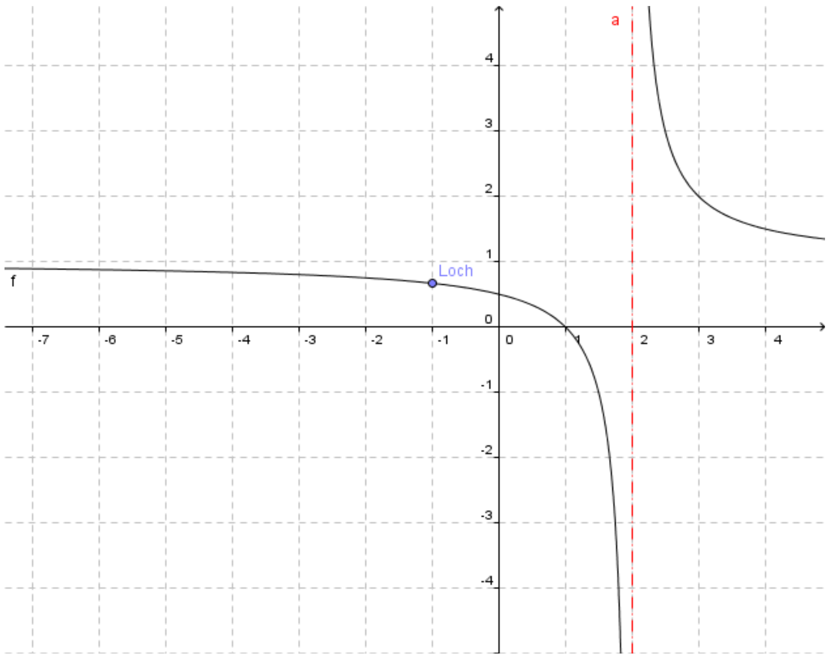
$f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x - 2)(x + 2)$

	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$

$12(x-2)^{\square}$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$f''(x)$	+	-	+
	Linkskrümmung	Rechtskrümmung	Linkskrümmung

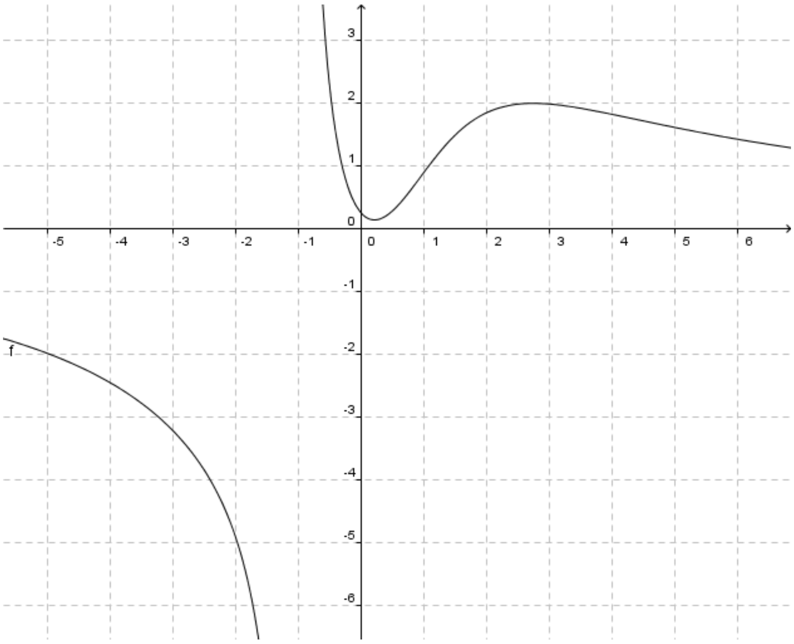
2.6 Asymptoten und Grenzwerte

a)



b) $$\lim_{x\to\infty}\frac{10x^2-4x+1}{x^3+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(10-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(10-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}=0$$

2.7 Skizze des Funktionsgraphen



3 Die Umkehrfunktion

a) Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel mit Scheitel in (0;-4). Für x $\geq$ 1 ist G_f streng monoton steigend und daher umkehrbar.

Ermittlung der Umkehrfunktion:

$y = 4x^2 - 4$

$x^2 = \frac{1}{4}y + 1$ Auflösen nach x

$x = \sqrt{\frac{1}{4}y + 1}$

$f^{-1}: x \mapsto \sqrt{\frac{1}{4}x + 1}$ Variablen vertauschen

b) Ermittlung der Umkehrfunktion:

$y = \sqrt{x - 3}$

$y^2 = x - 3$

$y^2 + 3 = x$

$g^{-1}: x \mapsto x^2 + 3$

Bestimmung des Schnittpunkts:

$\sqrt{x - 3} = x$ Der Schnittpunkt muss auf der Geraden y = x liegen!

$x - 3 = x^2$

$x^2 - x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3}\right) \notin \mathbb{R}$

Es gibt also keine Schnittpunkte von G_g und G_g^{-1}.