Mathe-Wettbewerb am Siebold 2009
Klassen 9a.9b und 9c

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

Aufgabe 1**: Würfelspiel**

Fritz und Laura spielen das folgende Würfelspiel:
Jeder Spieler erhält zwei übliche Spielwürfel und darf Würfe mit beiden Würfeln oder auch nur mit einem der beiden Würfel durchführen. Die gewürfelte Punktanzahlen werden addiert. Wem es zuerst gelingt, genau die Punktsumme 30 zu erreichen, der hat gewonnen. Wenn die Punktsumme 30 bei einem Wurf überschritten wird, dann beginnt der nächste Wurf wieder mit der Punktsumme 0.

a) Fritz hat zunächst immer mit beiden Würfeln gewürfelt und dabei 25 Punkte erreicht. Soll er beim nächsten Wurf wieder beide Würfel oder nur einen verwenden, um bei diesem Wurf die Punktsumme 30 zu erreichen? Begründe deinen Ratschlag.

b) Laura hat 22 Punkte erreicht. Welche maximale Gewinnchance hat Laura, im nächsten Wurf die Punktsumme 30 zu erreichen?

Aufgabe 2: **Parallelogrammdiagonale**

Zeige, dass in einem Parallelogramm mit den Seiten a und b und den Diagonalen d_1 und d_2 gilt: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$

Aufgabe 3 : **Temperaturmessung**

Tom notiert für jeden Tag in den Monaten Dezember und Januar die Mittagstemperatur. Nach Auswertung der Messdaten stellt er die folgende Merkwürdigkeit fest: Mit Ausnahme des ersten und letzten Messwertes im Beobachtungszeitraum war die Mittagstemperatur jeweils gleich der Summe der Mittagstemperaturen des Vortages und des darauf folgenden Tages. Die Mittagstemperaturen betrugen am 3. Dezember 5°C und am 31. Januar 2°C. Welche Mittagstemperatur hat Tom am 25. Dezember gemessen?

Lösungen zu 1:

Teil a) Von der Punktsumme 25 ausgehend müsste Fritz eine 5 würfeln, um die Punktsumme 30 zu erreichen. Da die Anzahl der möglichen Ergebnisse bei dem Wurf mit nur einem Würfel 6 beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses günstige Ergebnis eintritt, gleich $\frac{1}{6}$.

Wir wollen das Ergebnis eines Wurfes mit zwei Würfeln in der Form (e1; e2) festhalten. Dabei bezeichnen e1 und e2 das mit dem ersten bzw. zweiten dieser Würfel erreichte Ergebnis. Da die Anzahl der möglichen Ergebnisse bei einem Wurf mit zwei Würfeln 36 beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein günstiges Ergebnis (a; b) eintritt, gleich $\frac{1}{36}$.

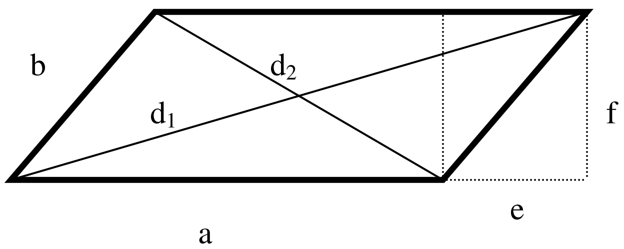
Wenn Fritz mit beiden Würfeln würfelt, dann gibt es für ihn genau folgende vier Möglichkeiten, die gewünschte 5 zu würfeln: (1; 4), (2; 3), (3; 2) oder (4; 1). Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz auf diese Weise gewinnt, gleich $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Wegen $\frac{1}{6} > \frac{1}{9}$ ist es daher für Fritz günstiger, wenn er nur mit einem Würfel würfelt.

Teil b) Von der Punktsumme 22 ausgehend muss Laura 8 Punkte würfeln, um die Punktsumme 30 zu erreichen. Dies ist in einem Wurf nur möglich, wenn sie mit zwei Würfeln würfelt. Es gibt genau folgende fünf Möglichkeiten, dies zu erreichen: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2). Da jedes dieser günstigen Ergebnisse mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$ eintritt,

kann Laura maximal eine Gewinnchance von $\frac{5}{36}$ erzielen.

zu Nr. 2:



$d_1^2 = (a+e)^2 + f^2 = a^2 + 2ae + e^2 + f^2$

$d_2^2 = (a-e)^2 + f^2 = a^2 - 2ae + e^2 + f^2$

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + e^2 + f^2)$, wobei nach Pythagoras gilt: $b^2 = e^2 + f^2$

$\Rightarrow$ Behauptung

zu Nr. 3:

Die notierten 62 Mittagstemperaturen bezeichnen wir der Reihe nach mit $T_1, T_2, ..., T_{62}$.
Dabei ist $T_3 = 5°C$ und $T_{62} = 2°C$. Für i = 1,2, ..., 59 haben wir laut Aufgabentext folgende Zusammenhänge: $T_{i+1} = T_i + T_{i+2}$ und $T_{i+2} = T_{i+1} + T_{i+3}$.

Wir eliminieren T_{i+2} und erhalten $T_{i+1} = T_i + T_{i+1} + T_{i+3}$ und daraus $T_i = - T_{i+3}$.
Für i = 1,2, ..., 56 finden wir mit der letzten Beziehung durch Einsetzen:
$T_{61} = T_{60}$ +2°C und T_{59} = -2°C bzw. T_{56} = 2°C und T_{53} = -2°C usw. In jeweils sechs Schritten wiederholen sich die Temperaturwerte –2° und 2°C. Es ist also $T_i = T_{i+6}$.
Mit $T_3 = -T_6$ findet man T_6 = -5°C sowie T_9 = -(-5°C) = 5°C usw.
Damit ist ... $T_{26} = T_{32} = T_{38} = T_{44} = T_{50} = T_{56} = T_{62}$ = 2°C sowie ... $T_{24} = T_{18} = T_{12} = T_6 = -T_3$ = -5°C.
Die Mittagstemperatur am 25. Dezember beträgt demnach $T_{25} = T_{24} + T_{26}$ = **- 3°C**.