

Mathe-Wettbewerb am Siebold 2011

Klassen 10a, 10b und 10c

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.
2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.
3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

Aufgabe 1: Schwarzarbeiter

Es wird behauptet, dass der Prozentsatz p der Hauseigentümer, die schon einmal einen Schwarzarbeiter beschäftigt haben, recht hoch ist. Durch eine Umfrage soll der Wert von p abgeschätzt werden. Da man aber bei einer direkten Frage sicher viele falsche Antworten erhält, werden die Antworten folgendermaßen verschlüsselt:

Jeder Befragte wirft zwei Münzen so, dass der Fragesteller das Ergebnis des Münzwurfs nicht kennt. Erhält der Münzwerfer zwei Mal „Zahl“, so beantwortet er die Frage F_1

wahrheitsgemäß mit ja oder nein; bei jedem anderen Ergebnis beantwortet der Münzwerfer F_2 wahrheitsgemäß mit ja oder nein.

Die Fragen lauten:

F_1 : Gilt: $1 + 2 = 3$?

F_2 : Haben Sie schon einmal einen Schwarzarbeiter beschäftigt?

Es werden nun 5000 Hausbesitzer befragt; 4011 von ihnen beantworten die Frage mit ja, die anderen mit nein, wobei der Fragende nicht weiß, auf welche Frage sich die Antwort bezieht. Wie könnt Ihr aus dem Umfrageergebnis einen ungefähren Wert von p ermitteln?

Aufgabe 2: Spielstrategie

Auf einem Spielbrett liegen 37 Spielsteine. Die beiden Spieler Paula und Christian nehmen im Wechsel mindestens einen Stein, höchstens aber k Steine vom Brett, mit $1 \leq k < m$.

Gewonnen hat derjenige Spieler, der das Brett leer räumt.

a) Christian setzt den Wert von $k = 11$ fest. Paula nimmt als erste Steine vom Brett, danach Christian, dann wieder Paula usw. bis das Brett leer ist.

Mit welcher Taktik kann Paula das Spiel gewinnen?

b) Welchen Wert hätte Christian für k wählen müssen, damit er hätte gewinnen können?

c) Gebt allgemein einen Term an, der zeigt, wie viele Steine Paula am Anfang nehmen muss, damit sie sicher gewinnt, wenn $k \leq 20$ ist.

Aufgabe 3: Partyproblem

In einem Raum befinden sich 6 Personen.

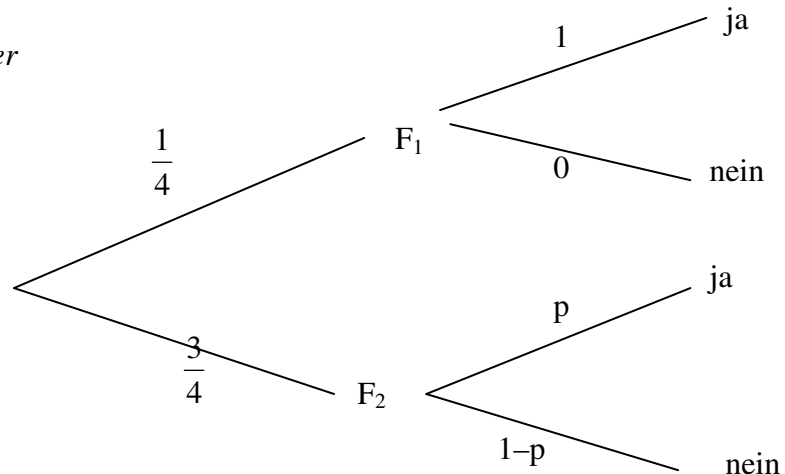
Trifft es stets zu, dass sich mindestens drei von ihnen kennen oder dass sich drei von ihnen fremd sind?

Hinweis: Falls die Person A die Person B kennt bzw. nicht kennt soll auch gelten: B kennt A bzw. B kennt A nicht!

Lösungen:

Aufgabe 1: Schwarzarbeiter

Baumdiagramm :



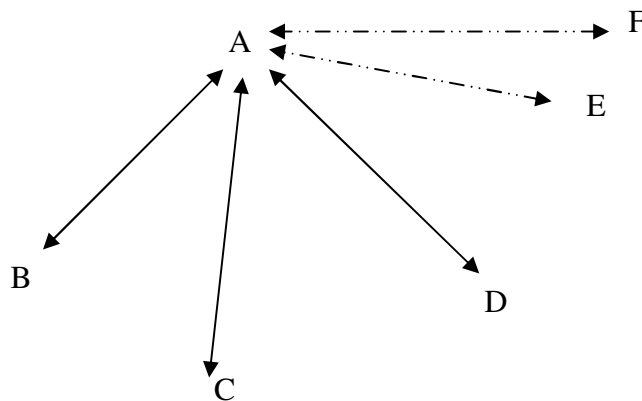
Die relative Häufigkeit $h = \frac{4011}{5000} = 0,8022 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot p = 0,8022 \Rightarrow p = 0,7363$

Aufgabe 2: Spielstrategie

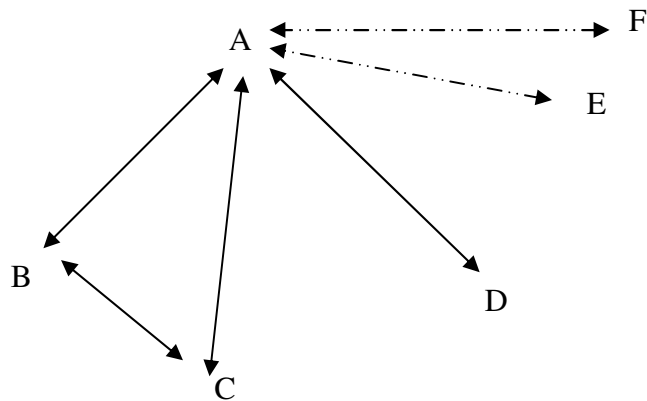
- a) Paula nimmt zuerst einen Stein, bei ihrem 2. Zug so viele Steine, dass insgesamt 13 Steine vom Brett fehlen, bei ihrem 3. Zug fehlen dann 25 Steine und nach ihrem 4. Zug alle Steine.
- b) Wenn Christian für $k = 36$ gewählt hätte, dann er bei richtiger Strategie gewinnen können.
- c) Paula wählt beim 1. Zug r Steine, wobei gilt: $37: (k+1) = z + r:(k+1)$; d.h. r ist der ganzzahlige Rest bei der Division von 37 durch $(k+1)$. Dieser Rest entsteht immer dann, wenn k ungleich 36 ist, da 37 prim ist.

Aufgabe 3: Partyproblem

Die Person A kennt nach dem Schubfachprinzip entweder mindestens 3 Personen oder mindestens 3 Personen nicht. Der eingetretene Fall ist nun mit einer durchgezogenen Linie markiert.



Fall a: Ist nun mindestens eine Kante [BC], [BD] oder [CD] durchgezogen, so kennen sich bzw. kennen sich nicht mindestens Personen
z. B. [BC]



Fall b: Ist nun **keine** Kante [BC], [BD] oder [CD] durchgezogen, so kennen sich bzw. kennen sich mindestens 3 Personen , nämlich B, C, D nicht!!

