Mathe-Wettbewerb am Siebold 2011
Klassen 8a, 8b und 8c

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

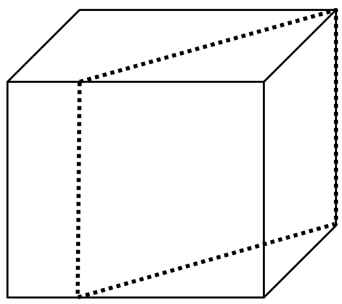
Aufgabe 1: *Welche Zahl?*

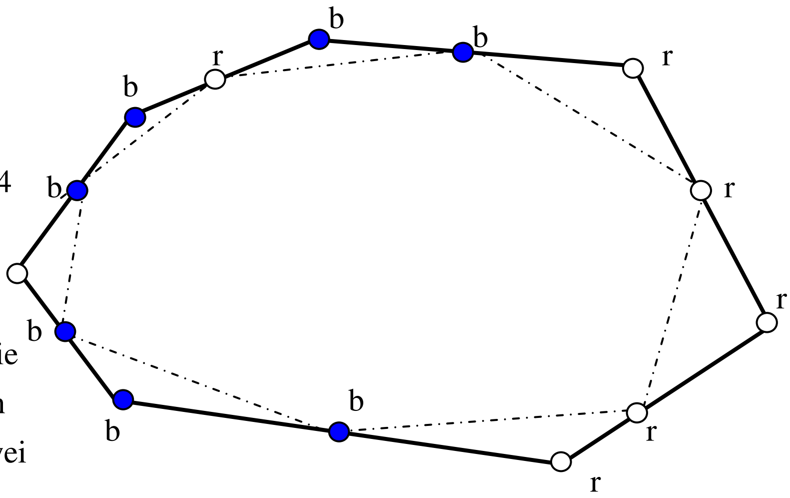
Tanja denkt sich eine vierstellige natürliche Zahl aus, die die Ziffernfolge **a b b c** hat. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben bedeuten verschiedene Ziffern.
a) Wie viele Zahlen gibt es, wenn a ungleich 0 ist?
b) Wie viele Zahlen gibt es, wenn zusätzlich die Quersumme 10 ist?
c) Wie viele Zahlen gibt es, wenn außerdem $a = b + 2$ gilt?
d) Wie lautet die gedachte Zahl, wenn außerdem $c = 4a$ gilt?

Aufgabe 2: *Würfelschnitte*

Durch einen Würfel wird ein ebener Schnitt gelegt.
a) Wie viele Ecken haben die jeweiligen Schnittfiguren?
b) Gibt es jeweils auch besondere Dreiecke, Vierecke und Sechsecke ? Wie muss der Schnitt dabei durchgeführt werden? Zeichnung!

Bsp:





<u>Aufgabe 3</u>: Ein Färbeproblem

In einem Siebeneck S_1 (vgl. Abbildung) sind 4 Ecken rot und 3 Ecken blau gefärbt.

Nun werden neue Siebenecke S_2, S_3, S_4, ... wie folgt gebildet:

a) Die Mittelpunkte der Kanten von S_1 sind die neuen Eckpunkte von S_2. Diejenigen Ecken von S_2 werden rot gefärbt, die zwischen zwei benachbarten gleichfarbigen Ecken von S_1 liegen. Die anderen Ecken von S_2 werden blau gefärbt.

b) Ausgehend von S_2 konstruiert man gemäß der Vorschrift von a) das Vieleck S_3; danach aus S_3 das Siebeneck S_4 und so weiter.

Könnt ihr nun durch hinreichend häufige Wiederholungen der Konstruktion zu einem Siebeneck S_n gelangen, bei dem alle Eckpunkte gleich gefärbt sind?

Viel Spaß !!!

Lösungen:

Aufgabe 1 :

a) Für a gibt es 9 Möglichkeiten, für b auch 9 Möglichkeiten, für c gibt es 8 Möglichkeiten:
$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ Möglichkeiten

b) b muss nun kleiner als 5 sein, folglich bleiben folgende 18 Zahlen (abzählen):
1009, 2008, 3007, 4006, 6004, 7003, 8002, 9001, 2116, 3115, 5113, 6112, 8110, 1225, 5221, 6220, 4330, 2440

c) Nun bleiben nur noch 2 Zahlen übrig: 2008 und 3115

d) Die Lösung lautet also 2008

Aufgabe 2 :

a) Dreiecke, Vierecke, Fünfecke und Sechsecke

b) gleichschenklige, gleichschenklig-rechtwinklige und gleichseitige Dreiecke
Quadrate, Rechtecke, Parallelogramme und Trapeze;
regelmäßiges Sechseck

Aufgabe 3 :

Widerspruchsbeweis:

Angenommen in einer Folge von Siebenecken ist S_n das erste Siebeneck mit lauter gleichen Farben. Dann gilt entweder:

(1) Im Siebeneck S_n sind alle Ecken blau

Das bedeutet, dass im Siebeneck S_{n-1} die Ecken im Wechsel rot und blau gefärbt sind, dies ist aber bei sieben Eckpunkten im „Kreis“ nicht möglich!.

Oder

(2) Im Siebeneck S_n sind alle Ecken rot

Das bedeutet, dass im Siebeneck S_{n-1} alle Ecken gleichfarbig sind. Folglich wäre S_n nicht das erste Siebeneck mit lauter gleichfarbigen Eckpunkten. Widerspruch!!