Mathe-Wettbewerb am Siebold 2012
Klassen 9a, 9,b , 9c und 9d

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

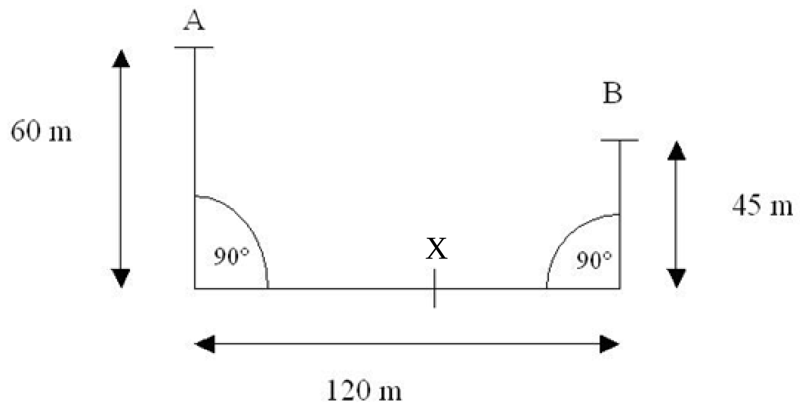
Aufgabe 1:
Sei n eine ungerade natürliche Zahl. Wir schreiben die Zahlen von 1 bis $2n$ auf eine Tafel. In jedem Schritt wischen wir zwei beliebige Zahlen a, b aus und schreiben stattdessen die Zahl $|a - b|$ auf die Tafel. Nach $2n-1$ Schritten steht nur noch eine Zahl auf der Tafel.
Beweisen Sie, dass diese ungerade ist.

Tipp: Die Summe der Zahlen ist $S = 1 + \ldots + 2n = n(2n + 1)$.

Aufgabe 2:

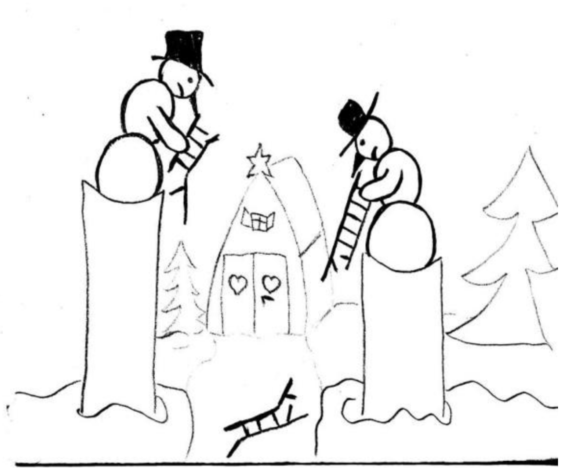
Das Leiterproblem

Die Türme A und B beschützen den Eingang zur Weihnachtswerkstatt. Auf dem Turm A sitzt der Schneemann Alexander und auf dem Turm B sitzt der Schneemann Berti. Allerdings gibt es keine Treppen, um auf die Türme zu gelangen. Deshalb hatte jeder Turm seine eigene Leiter. Nach dem letzten Schneesturm waren beide Leitern so zerstört worden, dass sich eine Reparatur nicht mehr lohnte. Der Chefschneemann Niclaus machte sich eine maßstäbliche Skizze von den Eingangstürmen.



Auch im hohen Norden ist die Wirtschaftskrise bemerkbar. Deshalb kann nur noch eine Leiter beliebiger Größe gekauft werden.
Chefschneemann Niclaus hat folgenden Plan: Man muss einen Punkt X zwischen den beiden Türmen finden der gleichweit von den Spitzen der Türme A und B entfernt ist und ein Scharnier im Boden befestigen, damit die Leiter auch bei extremer Schräglage dort befestigt und benutzt werden kann.
Damit benötigt man seiner Meinung nach nur noch eine einzige Leiter. Das Problem ist nur, er weiß nicht wie man den Punkt X findet und wie lang er die Leiter bauen lassen muss.

Finde durch eine geeignete maßstäbliche Konstruktion den Punkt X auf dem Boden, der der Forderung genügt, dass die Länge der Strecke von der Spitze des Turms A zu X gleich der Länge der Strecke von der Spitze des Turms B zu X ist, und bestimme auch die Länge der Leiter in Metern.
Überprüfe anschließend durch eine Rechnung die Ergebnisse.



Aufgabe 3 : Quadratzahl

Für wie viele ganze Zahlen n ($1 \leq n \leq 100$) ist n^n eine Quadratzahl?

Viel Spaß!!

Lösungen :

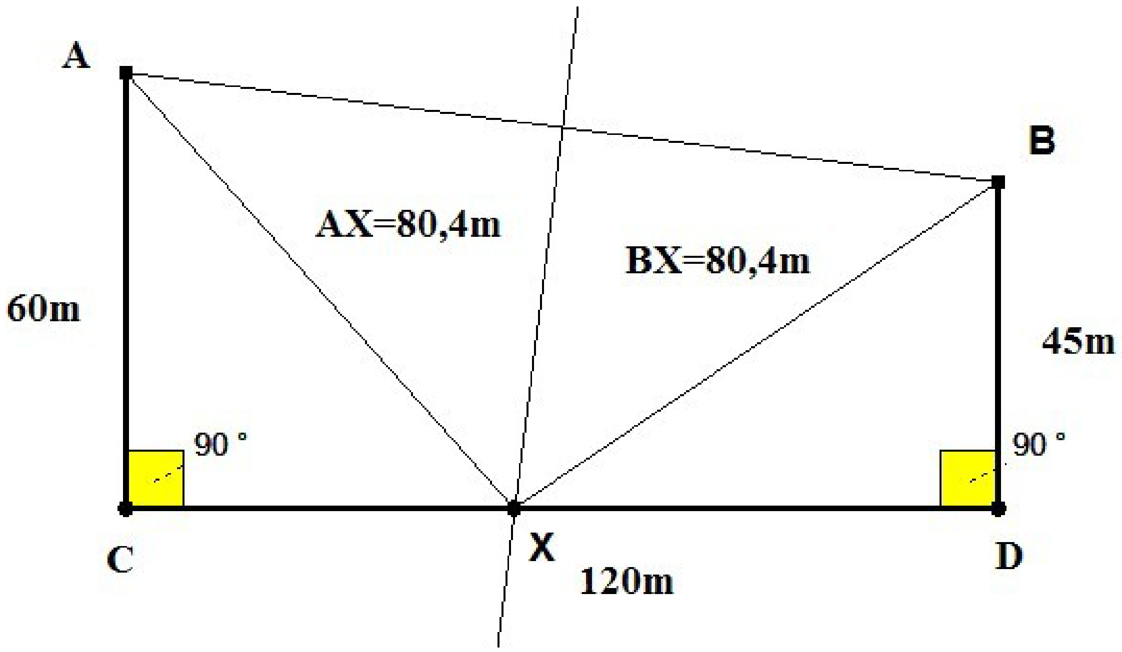
Aufgabe 1:

Die Summe der Zahlen ist $S = 1 + . . . + 2n = n(2n + 1)$, eine ungerade Zahl.
Nun wählen wir a > b ; d.h. wir verringern den vorhergehenden Summenwert , in dem (a+b) enthalten sind um (a-b) . (a+b) – (a – b) = 2b.
In jedem Schritt wird S um die gerade Zahl 2b vermindert. Damit bleibt S in jedem Schritt ungerade, was gerade die Invariante dieses Problems ist.

Aufgabe 2:

Man zeichnet eine maßstäbliche Zeichnung. Gewählter Maßstab: 60m entspricht 6cm. Anschließend konstruiert man die Mittelsenkrechte der Strecke [AB] . Diese schneidet die Bodenstrecke [CD] im Punkt X.
Aufgrund der Eigenschaften der Mittelsenkrechten ist dieser Punkt der gesuchte Punkt X. Durch messen ergibt sich: AX ≈ BX ≈ 8,04m . Die Leiter muss 80,4 m lang sein.

Rechnung:



Zur Vereinfachung gelten folgende Abkürzungen: $\overline{CX} = a$, $\overline{DX} = b$. Dann gilt:

$a + b = 120$, und $b = 120 - a$. Also $60^2 + a^2 = \overline{AX}^2$ und $45^2 + b^2 = \overline{BX}^2$. Dann gilt:

$60^2 + a^2 = 45^2 + b^2$ bzw. $60^2 + a^2 = 45^2 + (120 - a)^2$. Dann ergibt sich:

$$60^2 + a^2 = 45^2 + 120^2 - 2 \cdot 120a + a^2$$

$$a = \frac{60^2 - 45^2 - 120^2}{-2 \cdot 120}$$

$a = 53{,}4375 \Rightarrow b = 66{,}5625$. Also gilt für $\overline{AX} = \sqrt{60^2 + a^2} \Rightarrow \overline{AX} \approx 80{,}35$.

Damit müsste die Leiter 80,4 m lang sein. Diesen Wert bestätigt die Konstruktion.

Aufgabe 3:

Für alle 50 geraden Zahlen ist n^n eine Quadratzahl, da n = 2m und somit gilt: $n^n = n^{2m} = (n^m)^2$.

Darüber hinaus sind auch die Potenzen der ungeraden Quadratzahlen ihrerseits wieder Quadratzahlen: $1^1 = 1^2$; $9^9 = (3^2)^9 = (3^9)^2$; $25^{25} = (5^2)^{25} = (5^{25})^2$; $49^{49} = (7^2)^{49} = (7^{49})^2$; $81^{81} = (9^2)^{81} = (9^{81})^2$

Insgesamt sind es 55 Zahlen.