Mathe-Wettbewerb am Siebold 2012
Klassen 10a, 10b, 10 c und 10 d

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

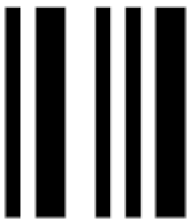
Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

Aufgabe 1: Martialisch

$2n + 1$ Personen werden so auf die Ebene gesetzt, dass die Abstände zwischen zwei Personen paarweise verschieden sind. Auf ein Kommando erschießt jede Person den Nachbarn mit geringstem Abstand. Beweisen Sie: *Mindestens eine Person überlebt.*

Aufgabe 2: Strichcodes

Die Strichcodes, die wir untersuchen wollen, bestehen abwechselnd aus schwarzen und weißen Strichen und beginnen und enden schwarz. Die Striche haben die Breite 1 oder 2, und die Gesamtbreite eines Codes soll 12 sein (s. Beispiel unten). Wie viele verschiedene Codes sind möglich, wenn stets von links nach rechts gelesen wird?



Aufgabe 3: Hochstapler

Raphael macht ein Praktikum bei der Stadtverwaltung. Dabei muss er 1,0 cm dicke Aktenmappen aufeinander in Schränke stapeln. Dabei fällt ihm auf, dass sich die Mappen fast bis auf 0,6 cm zusammen drücken lassen, wenn weitere Mappen darauf gestapelt werden. Wir nehmen an, eine Mappe wird bei jeder Mappe, welche darauf gestapelt wird, um 20 % der Differenz zu 0,6 cm. Raphael stapelt 50 Mappen.

a) Welche exakte Höhe hat die unterste Mappe?

b) Wie hoch ist der Stapel aus 50 Mappen?

Lösungen:

Zu 1.

Wir betrachten die beiden Personen mit minimalem Abstand. Diese schießen sich gegenseitig tot. Es gibt nun zwei Fälle: Die beiden Personen werden zusätzlich von mindestens einer anderen Kugel getroffen. In diesem Fall ziehen die beiden Personen insgesamt mindestens drei Kugeln auf sich. Daher muss mindestens eine Person überleben. Im zweiten Fall werden die beiden Personen von niemandem sonst getroffen. Dann können wir sie aus dem Spiel entfernen, weil sie das Schießverhalten der anderen Personen nicht beeinflussen. Wir können die gleiche Argumentation auf die verbleibenden $2n - 1$ Personen ausdehnen (=Rekursion). Entweder es trifft irgendwann der erste Fall zu oder wir haben am Ende nur noch 3 Personen vor uns, von denen eine überlebt.

Zu 2.

Da zu n schwarzen Strichen stets (n–1) weiße gehören, ist die Anzahl der Striche stets ungerade. Die maximale Anzahl von Strichen im 12 Einheiten breiten Strichcode beträgt 11, die minimale Anzahl ist 7.
Fall 1: Es sind 11 Striche. Der breite kann an 11 Stellen angebracht werden. <u>11 Möglichkeiten</u>

Fall 2: Es sind 9 Striche: 5 schwarze und 4 weiße. Damit die Gesamtbreite 12 Einheiten beträgt, müssen (12-9 =) 3 Striche breit sein. Wir verteilen die 3 breiten Striche auf 9 Positionen . Wir zählen nun alle Möglichkeiten ab :
1. breiter Strich auf Position 1, 2.. breiter Strich auf Position 2, : 7 Möglichkeiten
1. breiter Strich auf Position 1, 2.. breiter Strich auf Position 3, : 6 Möglichkeiten
….
1. breiter Strich auf Position1 : 7 + 6 +5 +4 + 3 + 2 + 1= 28
1. breiter Strich auf Position 2, 2.. breiter Strich auf Position 3 : 6 Möglichkeiten
….
1. breiter Strich auf Position 2 : 6 +5 +4 + 3 + 2 + 1= 21
1. breiter Strich auf Position 3, 2.. breiter Strich auf Position 4, : 5 Möglichkeiten
…
1. breiter Strich auf Position 3 : 5 +4 + 3 + 2 + 1= 15

…
insgesamt : 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = <u>84 Möglichkeiten</u>

Fall 3: Es sind 7 Striche: 4 schwarze und 3 weiße. Damit die Gesamtbreite 12 Einheiten beträgt,
müssen (12-7 =) 5 Striche breit sein.
Wir legen die beiden schmalen Striche auf <u>21 mögliche Plätze</u>.
Insgesamt gibt es somit 116 verschieden Strichcodes

Zu 3.

a) Unterste Mappe: $h = 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}8^{49} = 0{,}6000071\ldots$ cm
b) Stapel aus 50 Mappen hat ungefähr die Höhe: 32 cm.