

Mathe-Wettbewerb am Siebold 2012

Klassen 8a, 8b, 8c und 8d

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.
2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.
3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

Aufgabe 1: **Fibonacci-Folge**

Die Folge der Zahlen $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, \dots$ entsteht dadurch, dass man mit $1, 1$ beginnt und anschließend eine neue Zahl bildet, indem die beiden vorhergehenden Zahlen addiert werden. Ist die Summe größer als 9, wird die Zahl 10 subtrahiert.

Man zeige, dass die Folge periodisch ist und bestimme die maximal mögliche Periode.

Aufgabe 2: **Paare**

a und b seien ganze Zahlen.

Finde alle Paare (a, b) , für die die Gleichung $3ab - 7 = 5a + 2b$ gilt.

Aufgabe 3: **Winterliches Klettervergnügen**



Clown Leo stellt für seine täglichen Übungen eine Leiter recht steil an eine senkrechte Wand, um nun diese auf Händen hinaufzulaufen. Leider hat er nicht bedacht, dass jetzt im Winter der Boden sehr glatt ist. Als er mit den Händen genau auf der mittleren Sprosse der Leiter, (die von beiden Enden der Leiter gleich weit entfernt ist,) beginnt die Leiter langsam wegzurutschen. Clown Leo hält sich krampfhaft an dieser Sprosse fest.

Welche Figur beschreiben seine Hände beim Wegrutschen der Leiter?

Viel Spaß !!!

Lösungen:

Zu 1. Fibonacci:

Man legt die aufeinander folgenden Zahlenpaare jeweils in ein Schubfach (0/0), (0/1), ..(9/9). Von diesen Schubfächern gibt es maximal 100. Wenn ein Zahlenpaar in einem Schubfach liegt, so ist das nachfolgende Paar jeweils eindeutig bestimmt. Die maximale Periode ist 100. (oder auch 99, da das Paar (0/0) nicht auftreten kann.)

Zu 2. Zahlenpaare.

Umformen der Gleichung $3ab - 7 = 5a + 2b$ liefert
 $3ab - 5a = 2b + 7$
 $a(3b - 5) = 2b + 7$

Fallunterscheidung $|2b + 7| \geq |3b - 5|$

für positive Argumente in den Beträgen: $b \leq 12$ und $b > 1$

für $3b - 5 < 0$ und $2b + 7 > 0$:

$$b \leq 1: \quad 2b + 7 \geq 5 - 3b \quad 5b \geq -2 \quad b = 0 \text{ oder } b = 1$$

für $3b - 5 < 0$ und $2b + 7 < 0$: Widerspruch

Ausprobieren liefert die Paare (11,2) und (1,12) !!

Zu 3. Winterliches Klettervergnügen

Clown Leos Hände beschreiben beim Wegrutschen, je nachdem wie steil die Leiter an der Wand steht, einen Ausschnitt eines Viertelkreises.

Denn: Die Leiter stehe an der Wand und habe Y und Z als Enden der Leiter und P sei der Punkt, wo die Wand auf den Boden trifft. Der Punkt M entspreche den sich genau auf der Mitte der Leiter befindenden Händen des Clowns. Der Thaleskreis um M geht immer durch P, folglich ist der Abstand

stets konstant, und zwar $\frac{1}{2}YZ$. Somit bewegen sich die Hände des Clowns auf einem Viertelkreis.

