Mathe-Wettbewerb am Siebold 2013
Klassen 10a, 10b, und 10c
Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

Aufgabe 1: *Ruß auf der Stirn*

a) Zwei Dachdecker arbeiten auf einem Dach. Plötzlich lösen sich einige Ziegel und die Männer fallen vom Dach. Als sie wieder aufstehen, hat einer Ruß im Gesicht, während das Gesicht des anderen sauber ist. Da geht der mit dem sauberen Gesicht zu einem Wasserhahn und wäscht es sich. Warum?

b) Ein König hat drei Gefangene. Eines Tages geht er in den Kerker, tippt jedem seiner Gefangenen auf die Stirn und sagt dann: „ Mindestens einer von euch hat jetzt einen Rußfleck. Wer mir richtig sagt, ob seine Stirn rußig ist oder nicht, den lasse ich frei.“ Die Gefangenen haben keinen Spiegel und dürfen sich nicht unterhalten, finden aber dennoch die richtige Lösung. Wie?

c) Jetzt hat der König 100 hochintelligente Gefangene und er tippt jedem seiner Gefangenen auf die Stirn und sagt dann: „ Mindestens einer von euch hat jetzt einen Rußfleck. Wer mir richtig sagt, ob seine Stirn rußig ist oder nicht, den lasse ich frei.“ Diesmal wird über mehrere Runden gespielt. Wenn sich nach einer Runde niemand meldet, startet die Runde neu. Wann melden sich die Gefangenen mit den Rußflecken?

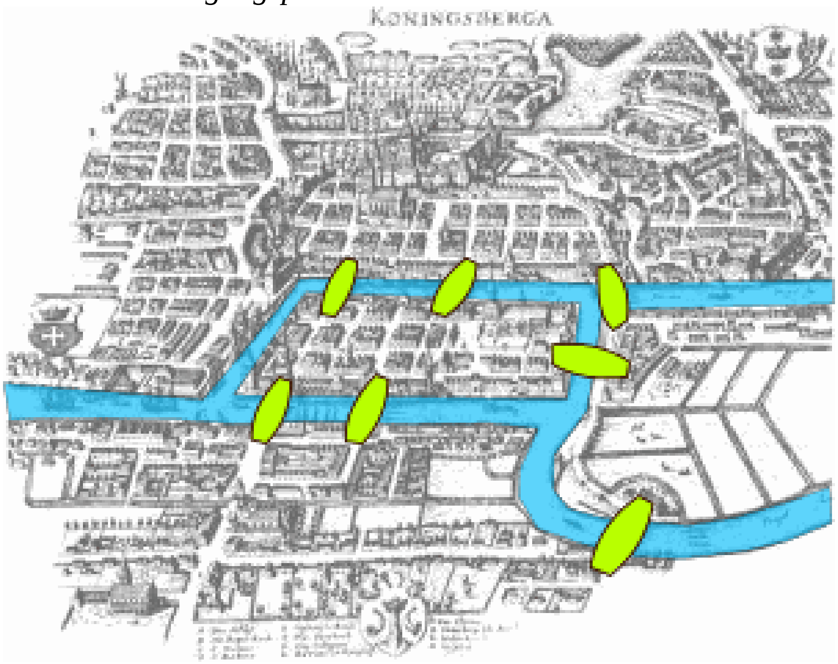
Aufgabe 2: *Dreieckszerlegung*

a) Könnt Ihr ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck in 5 gleichschenklige Dreiecke zerlegen?

b) Könnt Ihr ein gleichseitiges Dreieck in 5 gleichschenklige Dreiecke zerlegen?

<u>Aufgabe 3</u>: Königsberger Brückenproblem

Das Königsberger Brückenproblem ist eine mathematische Fragestellung des frühen 18. Jahrhunderts, die anhand von sieben Brücken der Stadt Königsberg illustriert wurde. In der Stadt Königsberg (heute Kaliningrad, Rußland) umschließen zwei Arme des Flusses Pregel die Insel Kneiphof. Ist es möglich, über jede der sieben Brücken genau einmal zu gehen und dann wieder zum Ausgangspunkt zurückzukehren?



Viel Spaß !!!

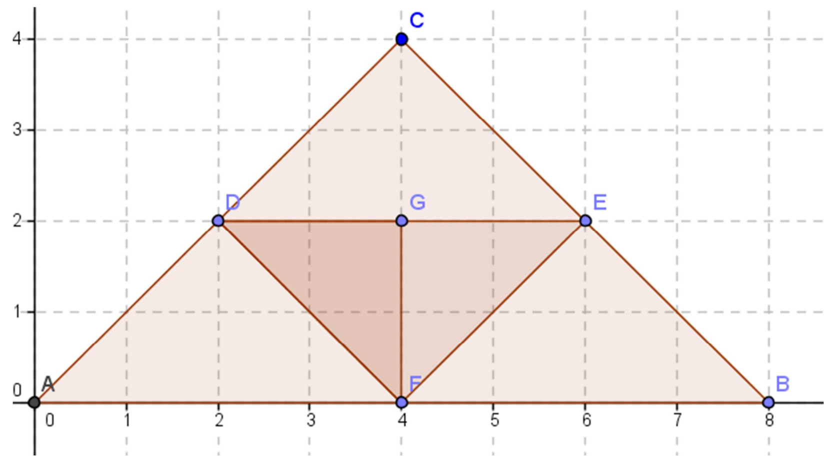
Lösungen:

Aufgabe 1:

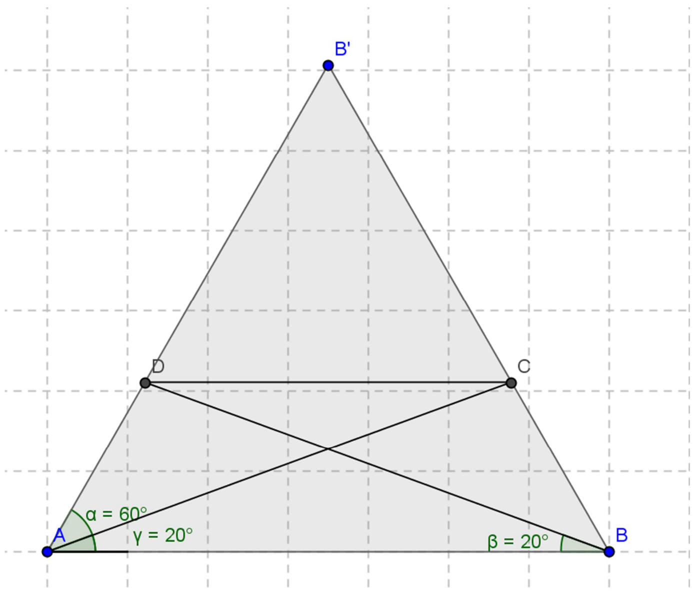
a) Der Mann, der sich das Gesicht wäscht, sieht Ruß auf der Stirn des anderen und denkt deswegen, dass sein Gesicht auch voller Ruß wäre. Der andere sieht keinen Ruß.

b), c) In diesen Aufgaben kann man folgendermaßen argumentieren:
Hat genau einer einen Rußfleck, so sieht er keinen weiteren und weiß, dass sein Gesicht voll Ruß ist.
Gibt es genau 2 mit Rußflecken, meldet sich in der ersten Runde niemand, da jeder mindestens einen Rußfleck gesehen hat. Zwei Gefangene haben je einen Rußfleck gesehen und alle anderen zwei. Die beiden, die nur einen Flecken gesehen haben, wissen darum in der 2. Runde, dass sie eine rußige Stirn haben, und sagen dies auch. Und so geht es weiter. Haben allgemein n Gefangene einen Rußfleck auf der Stirn, so hat sich in den ersten (n-1) Runden niemand gemeldet, da alle mindestens (n-1) Flecken sehen. In der n-ten Runde werden sich nun alle Gefangenen melden, die exakt (n-1) Flecken sehen, und sagen, dass ihre Stirn rußig ist.

Aufgabe 2:
a)



b)



Aufgabe 3:

Der Stadtplan Königsbergs lässt sich vereinfachen, indem man die Stadtteile durch Punkte und die Brücken durch Linien miteinander verbindet.
Wenn man über eine Linie in einen Punkt hineinläuft, soll man ihn auch wieder verlassen können. Da keine Linie mehrfach benutzt und auch keine Linie ausgelassen werden darf, muss folglich die Anzahl der Linien, die sich in einem Punkt treffen, geradzahlig sein. Auch vom Startpunkt müssen geradzahlig viele Linien ausgehen, da er ja gleichzeitig Zielpunkt ist. In dem Diagramm enden aber an jedem der vier Punkte ungeradzahlig viele Linien; folglich ist das Problem der Königsberger Brücken unlösbar.