Mathe-Wettbewerb am Siebold 2013
Klassen 9a, 9b, 9 und 9d

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift" Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

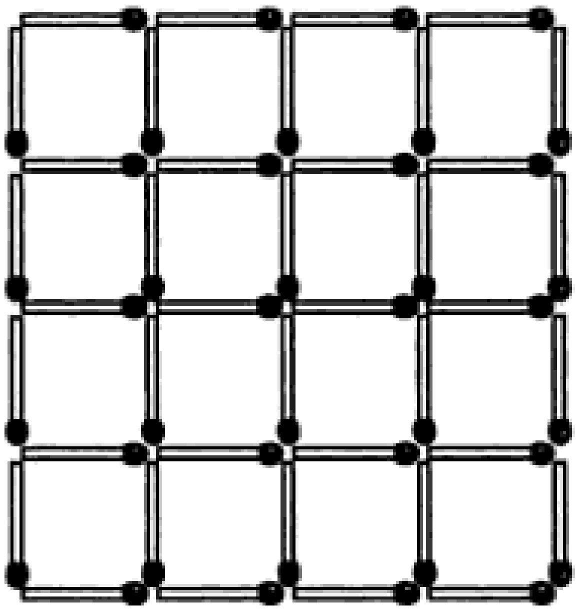
<u>Aufgabe 1</u>: Zerstörte Quadrate

Die folgende Aufgabe stammt von Sam Loyd (1841- 1911, USA), einem sehr berühmten Rätsel-und Spieleerfinder.

In der nebenstehenden Abbildung können ihr ein großes Quadrat erkennen, das aus einem 4x4- Quadratmuster aufgebaut ist.

a) Wie viele Quadrate sind jeweils sichtbar und aus wie vielen Streichhölzern besteht das Muster?

b) Wie viele und welche Streichhölzer müssen mindestens entfernt werden, damit alle Quadrate zerstört werden?



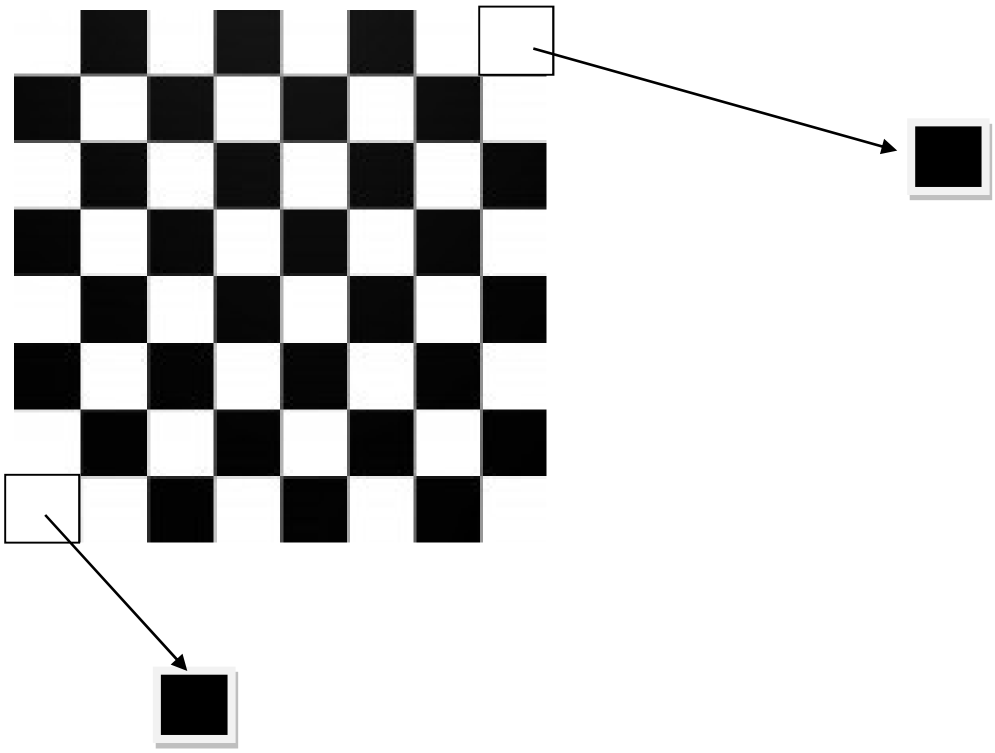
<u>Aufgabe 2</u>: Wurzelziehen

a) Es ist zu zeigen, dass gilt: $\sqrt{5\frac{5}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$.

b) Gibt es noch weitere gemischte Zahlen, bei denen man durch falsches Wurzelziehen, dennoch das richtige Ergebnis erhält. Wenn ja, gebt die 5 kleinsten dieser Zahlen an sowie den allgemeinen Term, der diese Zahlen beschreibt. Zeigt auch, dass der allgemeine Term die angegebene Bedingung erfüllt.

Aufgabe 3: Das zerstörte Schachbrett

Bei einem Schachbrett werden 2 sich diagonal gegenüberliegende Eckfelder herausgesägt (s. Abb.). Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, mit 31 Dominosteinen, die jeweils die Größe von 2 Schachfeldern haben, die übrig gebliebenen Felder zu überdecken?



Viel Spaß !!!

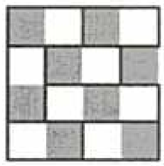
Lösungen:

Aufgabe 1 :

a) $30 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$ = Quadrate und 40 Streichhölzer

b)

Von den vierzig Streichhölzern, die ein Netz aus Quadraten bilden, müssen mindestens neun entfernt werden, damit alle Quadrate jeder Kantenlänge zerstört werden. Eine Lösung ist in der Abbildung skizziert.



Um zu beweisen, daß mindestens neun Streichhölzer entfernt werden müssen, werden die Quadrate des Musters wie bei einem Schachbrett abwechselnd schwarz und weiß gefärbt. Die schwarzen Quadrate haben untereinander keine gemeinsamen Kanten. Um also die acht schwarzen Quadrate zu zerstören, muß man mindestens ein Streichholz aus jedem Quadrat entfernen.

Die gleiche Argumentation gilt auch für die acht weißen Quadrate. Da jedoch weiße und schwarze Quadrate gemeinsame Kanten haben, ist es möglich, durch das Fortnehmen eines Holzes gleichzeitig ein schwarzes und ein weißes Quadrat zu zerstören. Man kann also durch das Entfernen von acht Streichhölzern alle Quadrate von einem Holz Kantenlänge zerstören.

Diese acht Hölzer liegen aber, wenn sie gleichzeitig jeweils zu einem weißen und einem schwarzen Quadrat gehören, alle im Inneren des Musters. Das große äußere Quadrat von vier Hölzern Kantenlänge muß somit noch zusätzlich zerstört werden, indem man ein neuntes Streichholz vom Rand fortnimmt.

Quelle: Sam Loyd, Sam Loyd and His Puzzles, New York 1928, S. 49.

Aufgabe 2:

a) $\sqrt{5\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 24 + 5}{24}} = \sqrt{\frac{125}{24}} = 5\sqrt{\frac{5}{24}}$

b) $2\frac{2}{3};\ 3\frac{3}{38};\ 4\frac{4}{15};\ 5\frac{5}{24};\ 6\frac{6}{35};\quad n\frac{n}{(n+1)(n-1)} = \frac{\mathrm{n(n+1)(n-1)+n}}{\mathrm{(n+1)(n-1)}} = \frac{n \cdot n^2}{(n+1)(n-1)}$

Aufgabe 3:

Jeder Dominostein überdeckt gerade ein weißes und ein schwarzes Feld, da aber 32 weiße und 30 schwarze Felder übrig bleiben, gibt es keine Lösung.