

Mathe-Wettbewerb am Siebold 2014

Klassen 9a, 9b, 9c, 9d und 9e

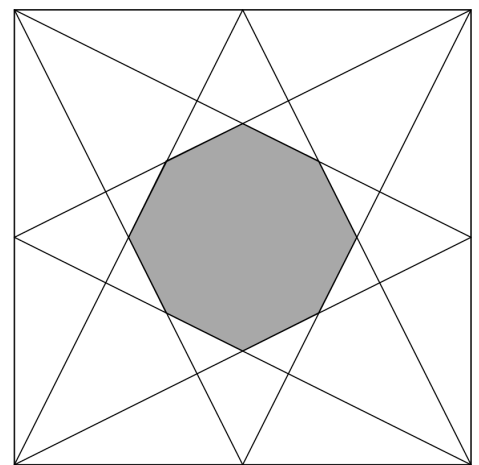
Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.
2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.
3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

Aufgabe 1: Regelmäßiges Achteck im Quadrat

Verbindet man die Seitenmitten eines Quadrates jeweils mit den gegenüberliegenden Ecken, so entsteht ein regelmäßiges Achteck, s. Skizze. Bestimmt das Verhältnis der Flächeninhalte von Achteck und Quadrat



Aufgabe 2: Langeweile bei den Packwichteln

In letzter Zeit beschwerten sich immer öfter Packwichtel bei Esmeralda darüber, dass es sie langweilt, immer das gleiche Geschenk einzupacken. Da Esmeralda nicht möchte, dass sich unter den Packwichteln schlechte Stimmung ausbreitet, überlegt sie sich ein System dafür, wie die Wichtel sich abwechseln können. Dieses System möchte sie zuerst in der Packstation „Sport“ ausprobieren, um es dann gegebenenfalls auf alle anderen Stationen auszuweiten. Die Packstation „Sport“ hat im ersten Raum neun Packplätze (siehe Bild).

Esmeraldas System hat folgende Regeln: Jeder Wichtel soll nur einen Tag am selben Tisch sitzen, also am nächsten Tag wechseln. Damit aber kein Chaos entsteht, sollen die Wichtel nur an einen Nachbartisch wechseln, also nach vorn, nach hinten, nach links oder rechts (nie diagonal!). Iffi packt heute Fahrräder ein (vorne in der Mitte).

Wo wird sie morgen sitzen, wenn alle Wichtel vor der Arbeit ihre Plätze nach Esmeraldas Regeln tauschen?



Aufgabe 3: Welche Kugel ist anders als die anderen?

Du hast zwölf Kugeln. Alle zwölf sehen gleich aus - eine ist allerdings leichter oder schwerer als die anderen elf. Außerdem hast Du noch eine Balkenwaage. Du darfst genau dreimal benutzen. Welche ist die andere Kugel? Ist sie leichter oder schwerer als die anderen elf?

Viel Spaß !!!

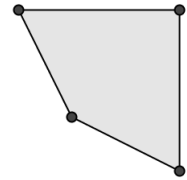
Lösungen:

Aufgabe 1: Achteck und Quadrat

Der Umkreisradius r des Achtecks ist $\frac{1}{4}$ der Seitenlänge des Quadrats .

Wähle Seitenlänge des Quadrats = 1 LE . Folglich gilt $r = \frac{1}{4}$ LE.

Ein Viertel des Achtecks hat folgendes Aussehen : Drachenviereck mit den Diagonalenlängen r und $r\sqrt{2}$.



Der Flächeninhalt des Drachenvierecks $A = \frac{1}{2} r \cdot r\sqrt{2}$.

Das Achteck hat damit den Flächeninhalt : $4 \cdot \frac{1}{2} r \cdot r\sqrt{2} = 2 r \cdot r\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{1}{16} \sqrt{2} = \frac{1}{8} \sqrt{2}$.

Dies entspricht auch dem Flächenanteil des Achtecks am Quadrat, da dessen Flächeninhalt 1 FE ist.

Aufgabe 2: Langeweile bei den Packwichteln

Wegen Invarianzprinzip : keine Lösung!!

Beim Platz (m/n) ändert sich entweder m oder n um ± 1 . Die Summe von neun Zahlen, die sich um jeweils 1 unterscheiden kann nicht Null sein.

Aufgabe 3: 12 Kugeln

Nummeriere die Kugeln: $K_1, K_2, K_3, \dots, K_{12}$

1. Wägung:

$K_1-K_4 \leftrightarrow K_5-K_8$

Wenn die Waage im Gleichgewicht ist: Abweichende ist eine der Kugeln K_9-K_{12} .

Dann in 2. Wägung K_9, K_{10} und K_{11} gegen drei normale. Das grenzt die falsche auf maximal drei Kugeln 3 ein. Wenn $K_9 - K_{11}$ schwerer (leichter), dann ist eine der drei Kugeln $K_9 - K_{11}$ schwerer (leichter). In diesem Fall wiege K_9 und K_{10} . Gleichgewicht K_{11} schwerer (leichter). Kein Gleichgewicht. K_9 oder K_{10} schwerer (leichter). Wenn bei 2. Wägung Gleichgewicht, dann K_{12} schwerer (leichter). Ergebnis folgt aus 3. Wägung.

Wenn linke Schale schwerer (rechts schwerer ergibt das gleiche in grün):

Jetzt ist eine von K_1-K_4 schwerer oder eine von K_5-K_8 leichter.

Dann zweite Wägung:

$K_1, K_2, K_3, K_5 \leftrightarrow K_4 + 3$ normale aus K_9-K_{12}

Links runter: K_1 oder K_2 oder K_3 schwerer

Rechts runter: K_4 schwerer oder K_5 leichter

Gleichgewicht: K_6 oder K_7 oder K_8 schwerer.

In allen Fällen hat man max. drei mögliche falsche, von denen man auch die Richtung der Abweichung kennt. Die dritte Wägung bringt hier sofort das Ergebnis, indem man im ersten oder letzten Fall zwei der drei gegeneinander wägt, oder im zweiten Fall eine der beiden gegen eine normale.