Gebrochen-rationale Funktion

1. **Definition**

   Eine Funktion f: $x \mapsto \frac{z(x)}{n(x)}$, wobei z(x) und n(x) ganzrationale Funktionen, heißt gebrochen-rationale Funktion.

   Bsp. (für gebrochen-rationale Funktionsterme):

   a) $f(x) = \frac{x-2}{x}$

   b) g(x) = $1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$ = f(x)

2. **Maximal möglicher Definitionsbereich D**

   Bemerkung: Eine gebrochen-rationale Funktion ist an den Nullstellen des Nenners n(x) nicht definiert. (Nenner darf nicht Null sein!!). D.h. wir bestimmen die maximal mögliche Definitionsmenge, indem wir die Nullstellen des Nenners suchen diese Stellen aus der Grundmenge R entfernen.

   Bsp.: a) $f(x) = \frac{x-2}{x}$; $D_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   b) l(x) = $\frac{(x-2)(x+1)}{x(x+4)}$; $D_{l,max} = \mathbb{R} \setminus$

   c) s(x) = $\frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x-3}$; $D_{s,max} = ?$

   Löse quadratische Gleichung für den Nenner $\Rightarrow D_{s,max} =$

3. **Nullstellen**

   Die Nullstellen einer gebrochen-rationalen Funktion liegen an den Nullstellen des Zählers z(x), wobei an diesen Stellen gelten muss, dass die Nennerfunktion n (x) $\neq 0$.

   Bsp.: a) $f(x) = \frac{x-2}{x}$; $D_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ N

   b) l(x) = $\frac{(x-2)(x+1)}{x(x+4)}$; $D_{l,max} = \mathbb{R} \setminus$

   c) s(x) = $\frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x-3}$; $D_{s,max} = \mathbb{R} \setminus$

Bei $x = -1$ liegt keine Nullstelle vor, da an dieser Stelle die Funktion nicht definiert ist!

Bem: In $D_{s,max}$ gilt: s(x) = $\frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x-3} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-2}{x-3}$ $(x \neq -1)$

<u>Vielfachheit von Nullstellen</u>

Hat eine gebrochen-rationale Funktion - nach der Zerlegung in Linearfaktoren und ggf. dem Kürzen - im Zähler

- Linearfaktoren mit ungeraden Exponenten, so liegen an diesen Stellen Schnittpunkte mit der x-Achse vor,
- Linearfaktoren mit geraden Exponenten, so liegen an diesen Stellen Berührpunkte mit der x-Achse vor.

Bsp.: a) f(x) = $\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{(x-2)}{(x-3)(x+1)}$ $D_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ hat einfache Nullstelle N(2/0) (Schnittpunkt mit x-Achse)

b) g(x) = $\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x+1)}$ hat an der Stelle x = 2 einen Berührpunkt mit der x-Achse (doppelte Nullstelle)

4. Vorzeichentabelle

Mit einer Vorzeichentabelle (VZT) untersuchen wir, ob der Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse verläuft. Dazu betrachten wir den faktorisierten Funktionsterm zwischen den einzelnen Definitionslücken und/oder Nullstellen und setzen geeigente Zwischenwerte ein.

Bsp.: g(x) = $\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x+1)}$ $D_{g,max} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

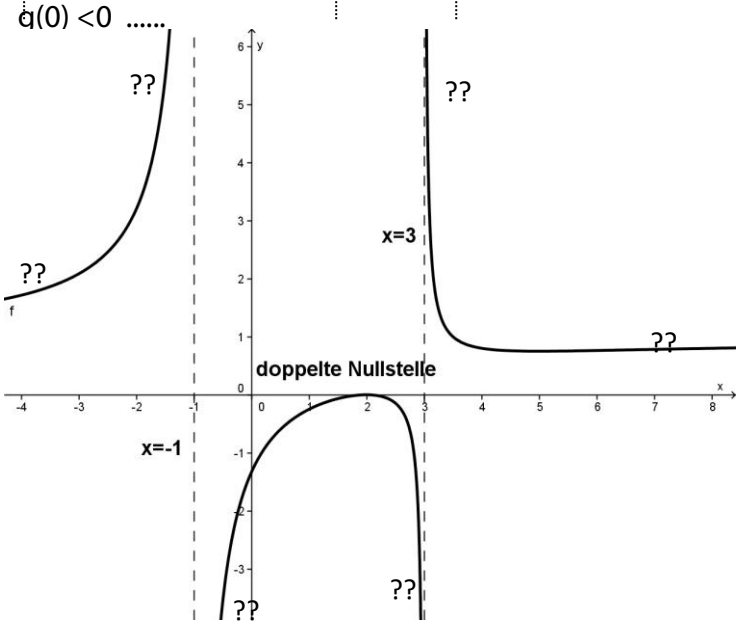
N(2/0)

VZT:

		−1		2		3		x
g(x)	+		−		−		+	

z. B. g(-2)>0 g(0) <0 .....

<u>Graph</u>



5. Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen im Unendlichen

Um das Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen im Unendlichen zu untersuchen (d.h. wir betrachten den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$), unterscheiden wir im Folgenden 3 Fälle:

a) Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_1(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+5}$

Grad des Zählerpolynoms = 1, denn $x = x^1$

Grad des Nennerpolynoms = 2, denn im Nenner steht die Potenz x^2

Diese Funktionen besitzen immer die <u>waagrechte Asymptote y = 0</u>

b) Der Grad des Zählerpolynoms ist gleich dem Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_2(x) = \dfrac{9x-3x^2}{2x^2-8}$

Grad des Zählerpolynoms = 2 = Grad des Nennerpolynoms

Diese Funktionen besitzen immer die waagrechte Asymptote $y = \dfrac{a}{b}$, wobei a bzw. b die Koeffizienten vor den größten Potenzen des Zähler- bzw. Nennerpolynoms sind.

hier: waagrechte Asymptote $y = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5$

c) Der Grad des Zählerpolynoms ist größer als der Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_3(x) = \dfrac{5x+4x^3}{2x-7}$;

Grad des Zählerpolynoms = 3; Grad des Nennerpolynoms =1

Hier ist der Grad des Zählerpolynoms um mehr als 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms. Diese Fälle betrachten wir nicht näher.

<u>Sonderfall:</u> Der Grad des Zählerpolynoms ist um 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_4(x) = \dfrac{5x-0{,}4x^3}{2x^2-8} = -0{,}2x + \dfrac{3{,}4x}{2x^2-8}$

Dieser ganz-rationale Anteil liefert die <u>schiefe Asymptote:</u> y = – 0,2x

6. Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen an den Definitionslücken

Um das Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen an den Definitionslücken zu untersuchen, zerlegen wir das Zähler- und das Nennerpolynom so weit wie möglich in Linearfaktoren, kürzen in $D_{f,max}$ und unterscheiden im Folgenden 3 Fälle:

a) Im Nenner bleibt an der Stelle $x = x_o$ ein Linearfaktor ungerader Ordnung

Bsp.: $f_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)}$

b) Im Nenner bleibt an der Stelle $x = x_o$ ein Linearfaktor gerader Ordnung

Bsp.: $f_2(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

c) Der Linearfaktor (x-xo) im Nenner lässt sich vollständig kürzen

Bsp.: $f_3(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x+2)} = x+2$ in $D_{f,max}$

zu a) - $f_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)^1}$

Schreibweise:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty \;;\quad \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty \;;\quad \text{oder: } \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{1}{x-1} = \pm\infty$$

Der Graph hat die senkrechte Asymptote:

$x = 1$

Wir sagen: x=1 ist eine Polstelle 1.Ordnung für G_{f1}

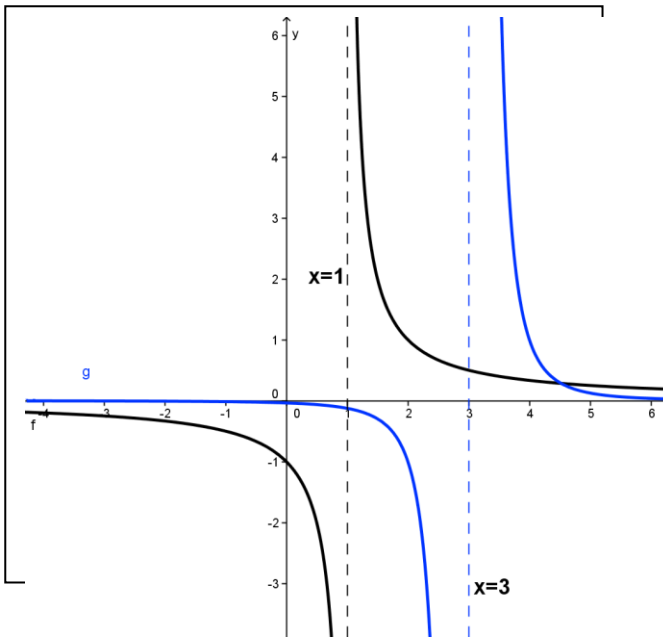
(In der Umgebung dieser Stelle hat G_{f1} einen Vorzeichenwechsel - VZW)

- $g_1(x) = \dfrac{1}{(x-3)^3}$

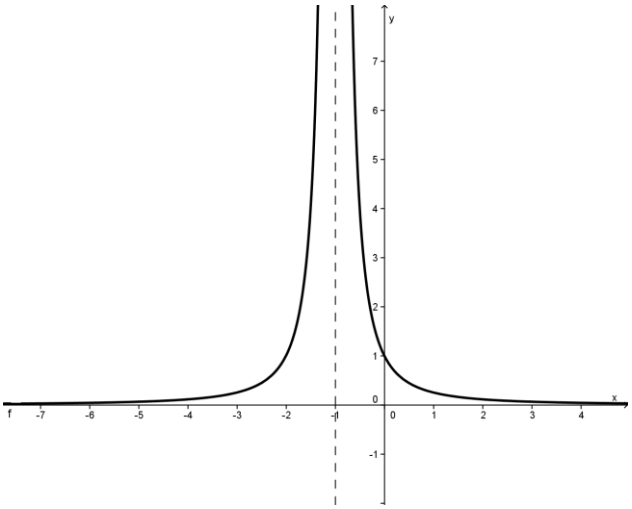
hat Polstelle 1.Ordnung für $x = 3$;

wir sagen: $x = 3$ ist senkrechte Asymptote für G_{g1}.

$$\lim_{x\to 3\pm 0} \frac{1}{(x-3)^3} = \pm\infty$$



zu b) - $f_2(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$



Schreibweise:

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{(x+1)^2} = +\infty$$

oder : $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty$

Graph hat senkrechte Asymptote:

$x = 1$

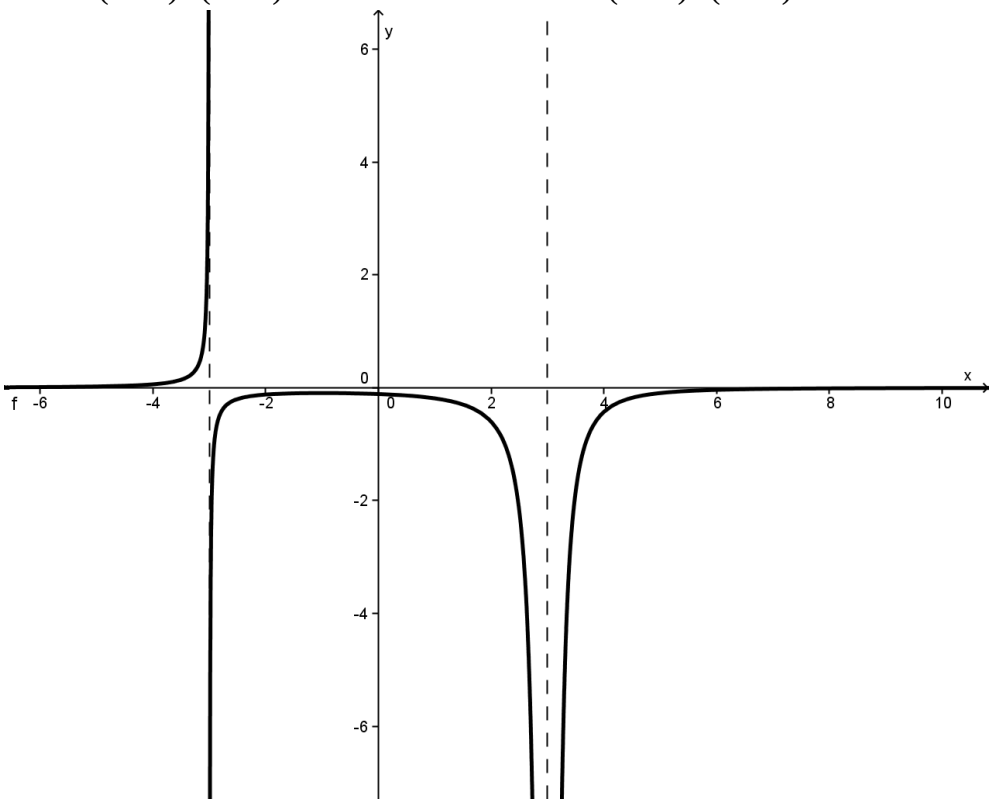
Wir sagen: x=1 ist eine Polstelle 2.Ordnung für G_{f2} - kein VZW !!

- $g_2(x) = \dfrac{-3}{(x-3)(x^2-9)} = \dfrac{-3}{(x-3)(x-3)(x+3)} = \dfrac{-3}{(x-3)^2(x+3)}$

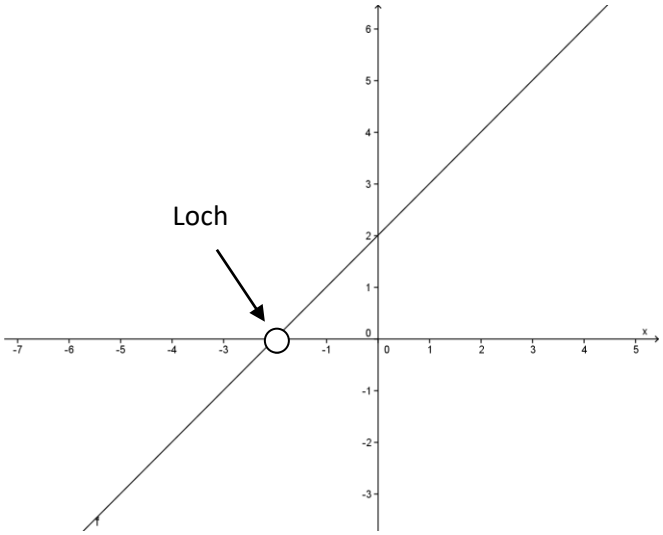
hat Polstelle 2.Ordnung für $x = 3$ (kein VZW) und Polstelle 1. Ordnung für $x = -3$.

$x = 3$ und $x = -3$ sind senkrechte Asymptote für G_{g2}.

$$\lim_{x \to 3 \pm 0} \frac{-3}{(x-3)^2(x+3)} = -\infty \qquad \lim_{x \to -3 \pm 0} \frac{-3}{(x-3)^2(x+3)} = \mp\infty$$



zu c) - $f_3(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x+2)} = x+2$ in $D_{f,max}$



Schreibweise:

$$\lim_{x \to -2+0} (x+2) = 0$$

$$\lim_{x \to -2-0} (x+2) = 0$$

kurz: $\lim_{x \to -2 \pm 0} (x+2) = 0$

Graph hat der Stelle x = – 2 ein Loch

- $g_3(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-1} = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2}{x+1}$ für $x \neq 1$

hat Polstelle 1. Ordnung für x = –1 (VZW) und ein Loch bei x =1 .

x = –1 ist senkrechte Asymptote für G_{g3} mit VZW (1. Ordnung).

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{2}{x+1} = 1 \qquad \lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{2}{x+1} = \pm\infty$$