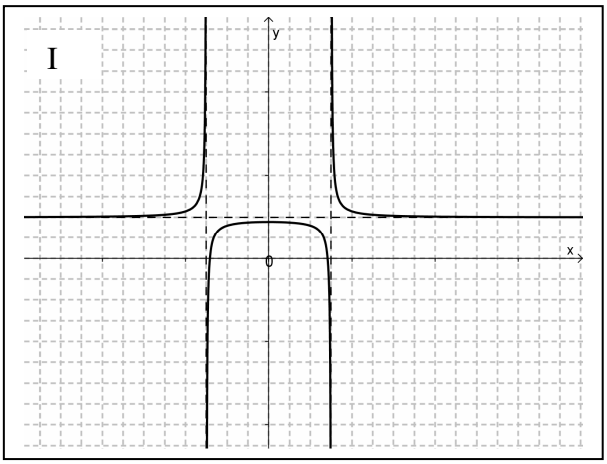
Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	
11	**Üben**	**XXX**	**Gebrochen-rationale Funktionen 2**	**W5**

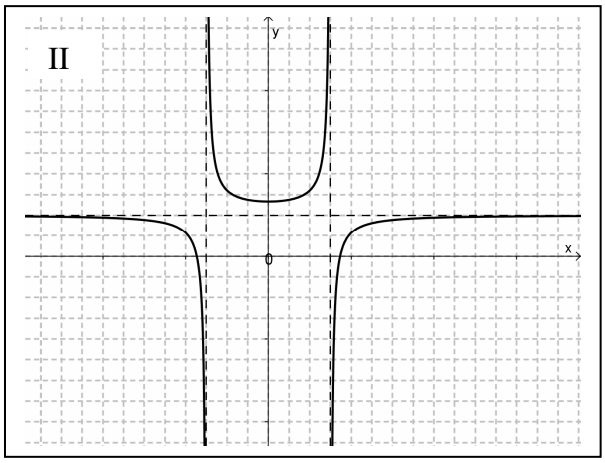
a) Gegeben ist f: $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 9}$; $D_f = D_{f,max}$. Ermitteln Sie die Nullstellen und die Pole von f.

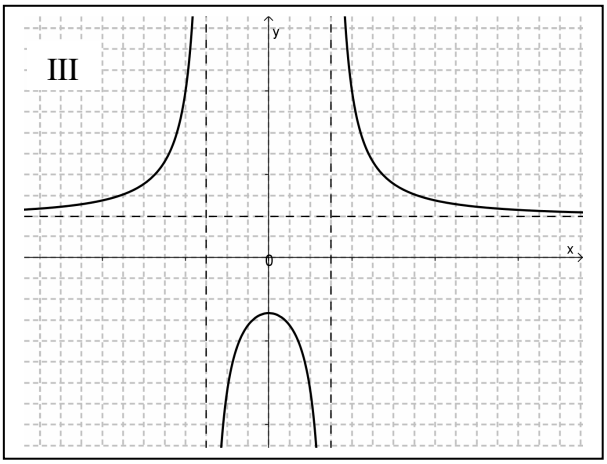
b) Es ist g: $g(x) = \dfrac{x^2 - c}{x^2 - d}$; $c \neq d$; $D_g = D_{g,max}$.
Geben Sie die Anzahl der
(1) Nullstellen in Abhängigkeit von c an.
(2) Pole in Abhängigkeit von d an.

c) Finden Sie jeweils Werte der Parameter c und d, für die g
(1) zwei Nullstellen, aber keinen Pol besitzt.
(2) keine Nullstelle, aber zwei Pole besitzt.
(3) weder eine Nullstelle noch einen Pol besitzt.

d) Für welche(n) der drei skizzierten Graphen G_g ist
(1) $cd > 0$,
(2) $cd < 0$ und
(3) wo gilt: $0 < d < c$







Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	
11	**Lösung**	**XXX**	**Gebrochen-rationale Funktionen 2**	**W5**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 9}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$; Nullstellen bei $x = \pm 4$

b) Voraussetzung: $c \neq d$

(1) 2 Nullstellen, wenn $c > 0$: $x = \pm\sqrt{c}$
1 Nullstelle, wenn $c = 0$: $x = 0$
keine Nullstelle, wenn $c < 0$

(2) 2 einfache Pole, wenn $d > 0$: $x = \pm\sqrt{d}$ sind Asymptoten
doppelte Polstelle, wenn $d = 0$: $x = 0$ ist Asymptote
keine Polstelle, wenn $d < 0$.

c) (1) 2 Nullstellen, aber keinen Pol, wenn $c > 0$ <u>und</u> $d < 0$
(2) keine Nullstelle, aber zwei Pole, wenn $c < 0$ <u>und</u> $d > 0$
(3) keine Nullstelle und keinen Pol, wenn $c < 0$ <u>und</u> $d < 0$

d) Wir sehen, dass alle Graphen G_g zwei einfache Pole besitzen, also ist $d > 0$.

(1) Wenn nun also $cd > 0$ gilt, muss auch $c > 0$ sein, d.h. G_g hat zwei Nullstellen und zwei Pole . Dies gilt offensichtlich für I und II.

(2) Wenn nun also $cd < 0$ gilt, muss $c < 0$ sein, d.h. G_g hat keine Nullstellen und zwei Pole . Dies gilt offensichtlich für III .

(3) Wenn nun also $0 < d < c$ gilt, muss nur noch $c > d$ erfüllt sein.
Also hat G_g zwei Nullstellen und zwei Pole.
Für $c,d > 0$ und $c > d$ gilt aber auch, dass $\sqrt{c} > \sqrt{d}$ erfüllt ist;
d.h. die rechte Nullstelle $x = \sqrt{c}$ liegt rechts von der rechten Polstelle $x = \sqrt{d}$
und die linke Nullstelle $x = -\sqrt{c}$ liegt links von der linken Polstelle $x = -\sqrt{d}$.
Diese Bedingung ist nur bei Bild II erfüllt.