| Klasse | Art | Schwierigkeit | Thema | |
|---|---|---|---|---|
| **11** | **Üben** | **XX** | **Gebrochen-rationale Funktionen 3** | **W8** |

Untersuchen Sie die drei folgenden Funktionen auf Nullstellen und auf Pole sowie auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.
Finden Sie bei jedem der drei Funktionsgraphen heraus, durch welche Quadranten er verläuft und welche Punkte er mit dem Koordinatensystem gemeinsam hat, und untersuchen Sie jeweils sein Symmetrieverhalten.
Ermitteln Sie die Gleichung(en) der Asymptote(n).

a) $f: x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3}$ ; $D_{f,max} = ?$

b) $g: x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2}$ ; $D_{g,max} = ?$

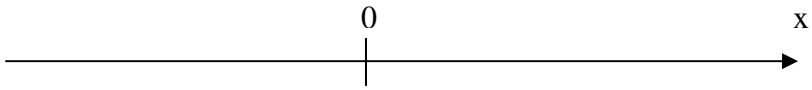
c) $h.: x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ ; $D_{h,max} = ?$

| Klasse | Art | Schwierigkeit | Thema | |
|---|---|---|---|---|
| **11** | **Lösung** | **XX** | **Gebrochen-rationale Funktionen 3** | **W8** |

a) $f: x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^3}$ ; $D_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , keine Nullstelle, da $x^2+1 > 0$

Pol mit VZW bei $x = 0$ ; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

VZT:




f(x) $-$ $+$

**III. Quadrant** **I. Quadrant**

keine gemeinsamen Punkte mit den Koordinatenachsen,
da keine Nullstellen existieren und $x = 0 \notin D_{f,max}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^3} = \frac{x^2+1}{-x^3} = -\frac{x^2+1}{x^3} = -f(x) \Rightarrow$$

$G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Asymptoten: $x = 0$ ; $y = 0$

b) g: $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2}$ ; $D_{g,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , keine Nullstelle, da $x^2+1 > 0$

Pol ohne VZW bei $x = 0$ ; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = 1$

VZT:

| | 0 | x |
|---|---|---|
| g(x) | + | + |
| | **II. Quadrant** | **I. Quadrant** |

keine gemeinsamen Punkte mit den Koordinatenachsen,
da keine Nullstellen existieren und $x = 0 \notin D_{g,max}$

$$g(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2} = g(x) \quad \Rightarrow$$

$G_g$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse

Asymptoten: $x = 0$ ; $y = 1$

c) h: $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$ ; $D_{h,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , keine Nullstelle, da $x^2+1 > 0$

Pol mit VZW bei $x = 0$ ; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = \pm\infty$

VZT:

| | 0 | x |
|---|---|---|
| h(x) | − | + |
| | **III. Quadrant** | **I. Quadrant** |

keine gemeinsamen Punkte mit den Koordinatenachsen,
da keine Nullstellen existieren und $x = 0 \notin D_{h,max}$

$$h(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -h(x) \quad \Rightarrow$$

$G_h$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Asymptoten: $x = 0$ ; $y = x$