# Skript: G8 –11. Klasse – Mathematik

# I Gebrochen-rationale Funktionen

## 1 Definitionslücken, Nullstellen und Vorzeichentabelle

Bsp. (für gebrochen-rationale Funktionsterme):

a) $f(x) = \frac{x-2}{x}$

b) $g(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

c) $h(x) = .....$

<u>Def.:</u> Eine Funktion f: $x \mapsto \frac{z(x)}{n(x)}$ , wobei z(x) und n(x) Polynomfunktionen sind, heißt gebrochen-rationale Funktion.

Wh: Eine gebrochen-rationale Funktion ist an den Nullstellen des Nenners n(x) nicht definiert. (Nenner darf nicht Null sein!!). D.h. wir bestimmen die maximal mögliche Definitionsmenge, indem wir die Nullstellen des Nenners suchen und aus der Definitionsmenge entfernen.

Bsp.: a) $f(x) = \frac{x-2}{x}$ ; $D_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $l(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+4)}$ ; $D_{l,max} = \mathbb{R} \setminus \{0; -4\}$

c) $s(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x-3}$ ; $D_{s,max} = ?$

Löse quadratische Gleichung $\Rightarrow$ $D_{s,max} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 3\}$

Wh: Die Nullstellen einer gebrochen-rationale Funktion liegen an den Nullstellen des Zählers z(x), wobei an diesen Stellen gelten muss: $n(x) \neq 0$.

Bsp.: a) $f(x) = \frac{x-2}{x}$ ; $D_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ N(2/0)

b) $l(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x(x+4)}$ ; $D_{l,max} = \mathbb{R} \setminus \{0; -4\}$ N1(2/0); N2(– 1/0)

c) $s(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x-3}$ ; $D_{s,max} = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 3\}$ N(2/0)

Bei $x = -1$ liegt keine Nullstelle, da an dieser Stelle die Funktion nicht definiert ist!

Bem: In $D_{s,max}$ gilt: $s(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2-2x-3} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{x-2}{x-3}$ $(x \neq -1)$

<u>Vielfachheit von Nullstellen</u>

Hat eine gebrochen-rationale Funktion - nach der Zerlegung in Linearfaktoren und ggf. dem Kürzen - im Zähler

- Linearfaktoren mit ungeraden Exponenten, so liegen an diesen Stellen Schnittpunkte mit der x-Achse vor,
- Linearfaktoren mit geraden Exponenten, so liegen an diesen Stellen Berührpunkte mit der x-Achse vor,

Bsp.: a) $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{(x-2)}{(x-3)(x+1)}$ $\quad D_{f,max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,3\}$ hat einfache Nullstelle N(2/0) (Schnittpunkt mit x-Achse)

b) $g(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x+1)}$ hat an der Stelle x = 2 einen Berührpunkt mit der x-Achse (doppelte Nullstelle)

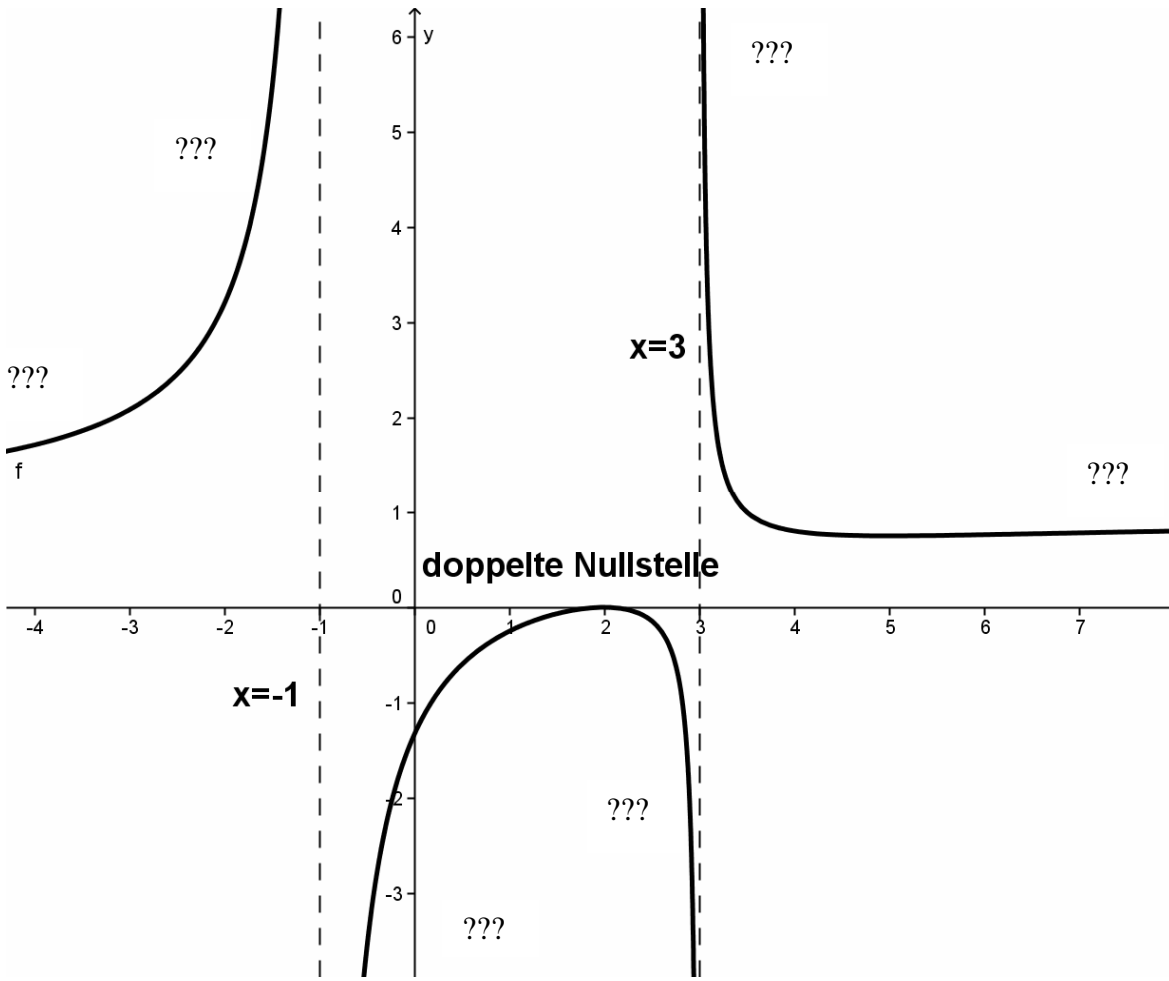
Wh: Mit einer Vorzeichentabelle (VZT) untersuchen wir, ob der Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse verläuft. Dazu betrachten wir den faktorisierten Funktionsterm zwischen den einzelnen Definitionslücken und/oder Nullstellen und setzen geeigente Zwischenwerte ein.

Bsp.: $g(x) = \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-3)(x+1)^2} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x+1)}$ $\quad D_{g,max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,3\}$

N(2/0)

VZT:

| | | −1 | | 2 | | 3 | | x |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | + | | − | | − | | + | |

z. B. g(-2)>0 g(0) <0 .....

Graph