## 2 Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen an den Definitionslücken

Um das Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen an den Definitionslücken zu untersuchen, zerlegen wir das Zähler- und das Nennerpolynom so weit wie möglich in Linearfaktoren, kürzen in $D_{f,max}$ und unterscheiden im Folgenden 3 Fälle:

a) Im Nenner bleibt an der Stelle $x_o$ ein Linearfaktor ungerader Ordnung

Bsp.: $f_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)}$

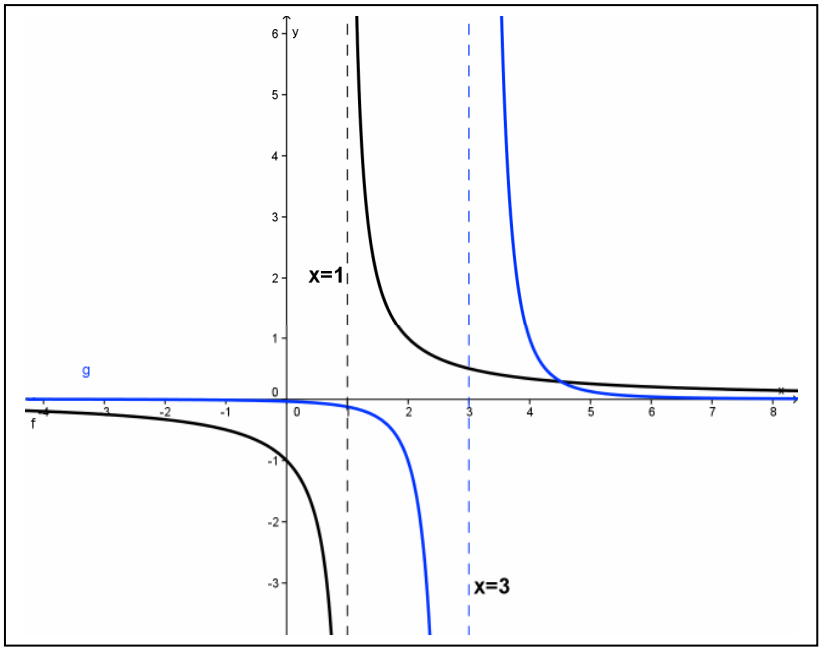
b) Im Nenner bleibt an der Stelle $x_o$ ein Linearfaktor gerader Ordnung

Bsp.: $f_2(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

c) Der Linearfaktor (x-xo) im Nenner lässt sich vollständig kürzen

Bsp.: $f_3(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x+2)} = x+2$ in $D_{f,max}$

zu a) - $f_1(x) = \dfrac{1}{(x-1)^1}$




Schreibweise:

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

oder : $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{1}{x-1} = \pm\infty$

Graph hat senkrechte Asymptote:
x = 1

Wir sagen: x=1 ist eine Polstelle 1.Ordnung für $G_{f1}$

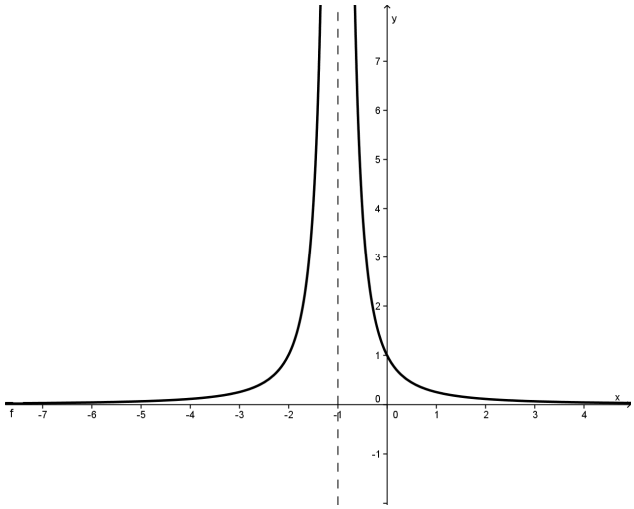
(an dieser Postelle hat $G_{f1}$ einen Vorzeichenwechsel - VZW)

- $g_1(x) = \dfrac{1}{(x-3)^3}$

hat Polstelle 1.Ordnung für x = 3 bzw. x = 3 ist senkrechte Asymptote für $G_{g1}$.

$$\lim_{x \to 3 \pm 0} \frac{1}{(x-3)^3} = \pm\infty$$

zu b) - $f_2(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$




Schreibweise:

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

oder : $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

Graph hat senkrechte Asymptote:

$x = 1$

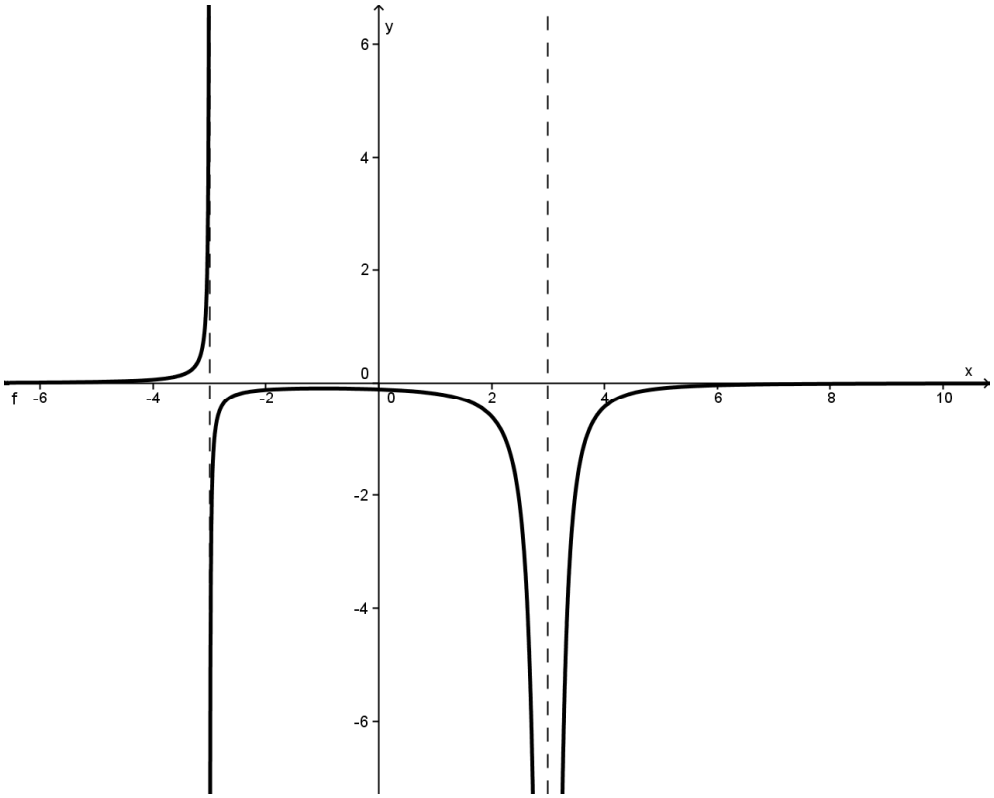
Wir sagen: x=1 ist eine Polstelle 2.Ordnung für $G_{f2}$ - kein VZW !!

- $g_2(x) = \dfrac{-3}{(x-3)(x^2-9)} = \dfrac{-3}{(x-3)(x-3)(x+3)} = \dfrac{-3}{(x-3)^2(x+3)}$

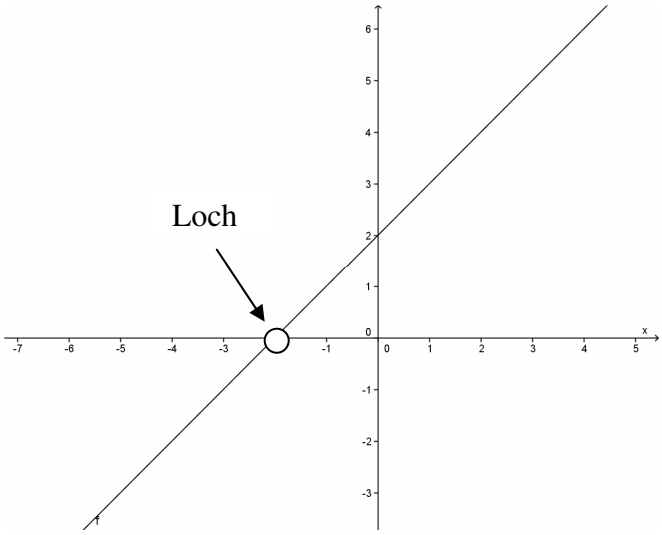
hat Polstelle 2.Ordnung für $x = 3$ (kein VZW) und Polstelle 1. Ordnung für $x = -3$ .

$x = 3$ und $x = -3$ sind senkrechte Asymptote für $G_{g2}$.

$$\lim_{x \to 3 \pm 0} \frac{-3}{(x-3)^2(x+3)} = -\infty \qquad \lim_{x \to -3 \pm 0} \frac{-3}{(x-3)^2(x+3)} = \mp\infty$$



zu c) - $f_3(x) = \dfrac{(x+2)^2}{(x+2)} = x+2$ in $D_{f,max}$




Schreibweise:

$$\lim_{x \to -2+0} (x+2) = 0$$

$$\lim_{x \to -2-0} (x+2) = 0$$

kurz : $\lim_{x \to -2 \pm 0} (x+2) = 0$

Graph hat der Stelle x = – 2 ein Loch

- $g_3(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-1} = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2}{x+1}$

hat Polstelle 1. Ordnung für x = −1 (VZW) und ein Loch bei x =1 .

x = 3 und x = −3 sind senkrechte Asymptote für $G_{g2}$.

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{2}{x+1} = 1 \qquad \lim_{x \to -1 \pm 0} \frac{2}{x+1} = \pm\infty$$