3 Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen im Unendlichen

Um das Verhalten gebrochen-rationaler Funktionen im Unendlichen zu untersuchen (d.h. wir betrachten den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$), unterscheiden wir im Folgenden 3 Fälle:

a) Der Grad des Zählerpolynoms ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_1(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+5}$

Grad des Zählerpolynoms = 1, denn $x = x^1$

Grad des Nennerpolynoms = 2, denn im Nenner steht die Potenz x^2

Diese Funktionen besitzen immer die <u>waagrechte Asymptote y = 0</u>

b) Der Grad des Zählerpolynoms ist gleich dem Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_2(x) = \dfrac{9x-3x^2}{2x^2-8}$

Grad des Zählerpolynoms = 2 = Grad des Nennerpolynoms

Diese Funktionen besitzen immer die waagrechte Asymptote $y = \dfrac{a}{b}$, wobei a bzw. b die Koeffizienten vor den größten Potenzen des Zähler- bzw. Nennerpolynoms sind.

hier: waagrechte Asymptote $y = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5$

c) Der Grad des Zählerpolynoms ist größer als der Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_3(x) = \dfrac{5x+4x^3}{2x-7}$;

Grad des Zählerpolynoms = 3; Grad des Nennerpolynoms =1

Hier ist der Grad des Zählerpolynoms um mehr als 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms. Diese Fälle betrachten wir nicht näher.

<u>Sonderfall:</u> Der Grad des Zählerpolynoms ist um 1 größer als der Grad des Nennerpolynoms

Bsp.: $f_4(x) = \dfrac{6x-0{,}4x^3}{2x^2-8}$;

Wir führen eine Polynomdivision durch und erhalten einen ganz-rationalen Anteil:

$$(-0{,}4x^3+5x):(2x^2-8) = -0{,}2x + \frac{3{,}4x}{2x^2-8}$$

Im Bsp.:

$$\begin{array}{l} -0{,}4x^3+1{,}6x \\ \hline \quad 3{,}4x \end{array}$$

Dieser ganz-rationale Anteil liefert die <u>schiefe Asymptote:</u> $y = -0{,}2x$

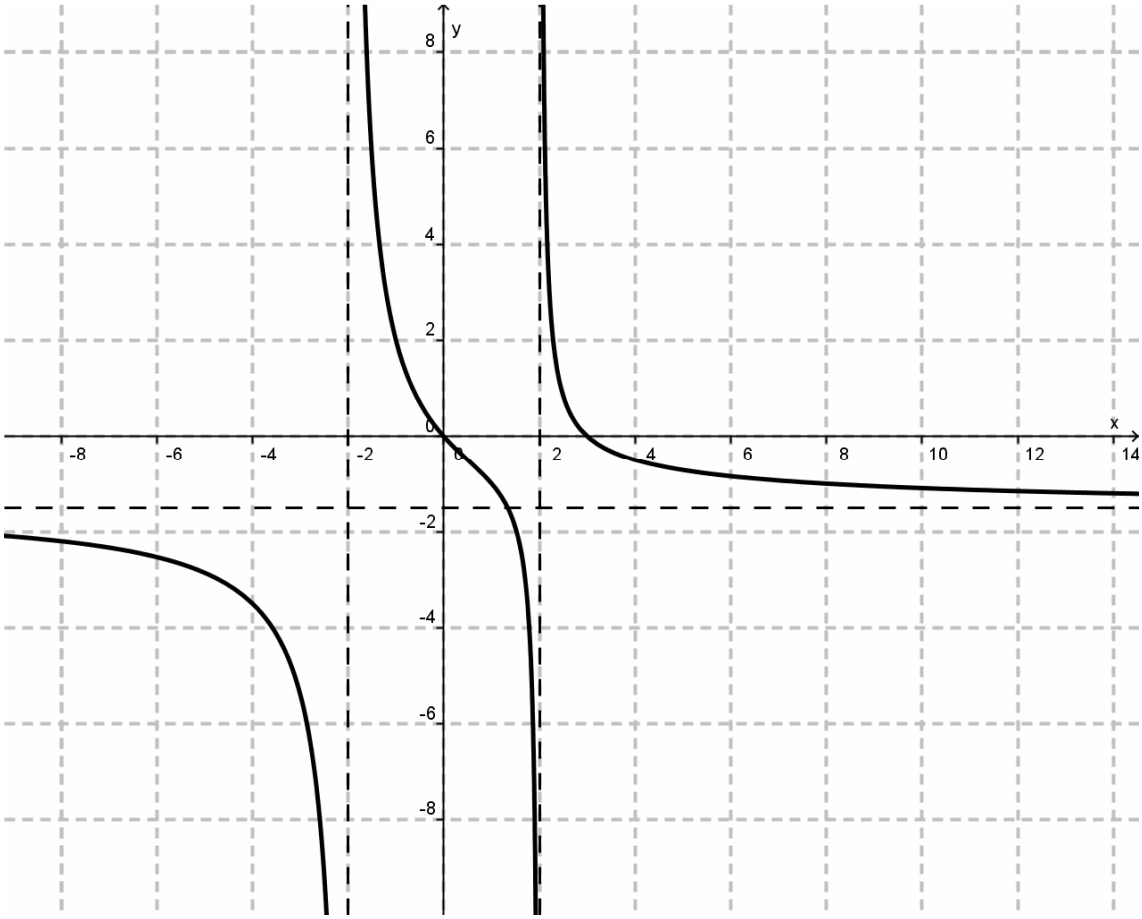
Begründung für a) und b):
Wir klammern die größte Potenz des Nennerpolynoms aus und erhalten:

a) $$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x+2}{x^2+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\overset{0}{\frac{3}{x}}+\overset{0}{\frac{2}{x^2}}\right)}{x^2\left(1+\underset{0}{\frac{5}{x^2}}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

d.h. Der Graph nähert sich für $x \to \pm\infty$ dem y-Wert Null an.
$y = 0$ ist die Gleichung der x-Achse (Asymptote).

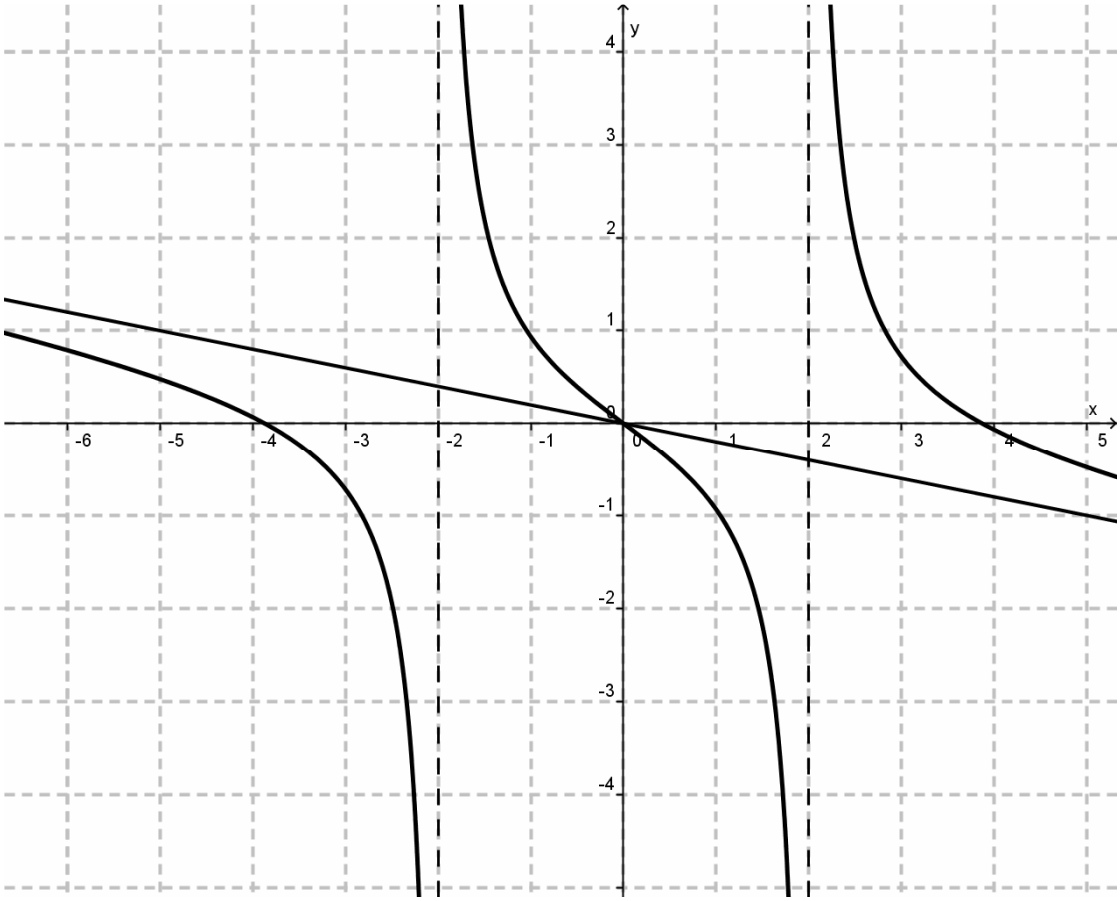
b) $$\lim_{x\to\pm\infty} f_2(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x-3x^2}{2x^2-8} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(\overset{0}{\frac{9}{x}}+3\right)}{x^2\left(2-\underset{0}{\frac{8}{x^2}}\right)} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

d.h. Der Graph nähert sich für $x \to \pm\infty$ dem y-Wert $-1{,}5$ an.
$y = -1{,}5$ ist die Gleichung der waagrechten Asymptote.



c) Sonderfall: $f_4(x) = \dfrac{6x - 0{,}4x^3}{2x^2 - 8} = -0{,}2x + \dfrac{3{,}4x}{2x^2 - 8}$ (s.o.)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f_4(x) - (-0{,}2x)\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3{,}4x}{2x^2 - 8} = 0$$

s.a)

d.h. der Graph von f_4 nähert sich für $x \to \pm\infty$ der Geraden $y = -0{,}2x$ an.
Diese Gerade ist eine <u>schiefe Asymptote</u> für G_{f_4} .