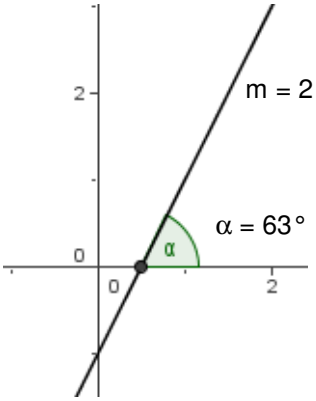
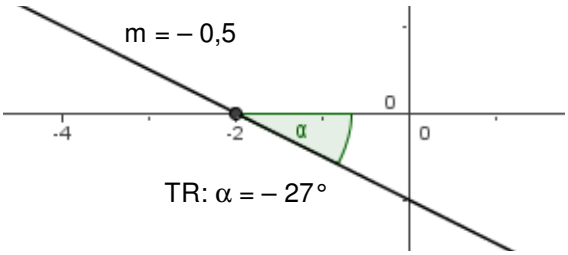
Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	S. 52
11	**Anwenden**	**XXX**	**Ableitung, Schnitwinkel**	**14**

Vorneweg eine Erklärung zu Schnittwinkeln mit der x-Achse:

Die Gleichung $m = \tan\alpha$ bietet die Möglichkeit, mit dem Taschenrechner aus der Steigung m einer Geraden ihren Schnittwinkel mit der x-Achse zu berechnen und umgekehrt.
Dabei liefert der Taschenrechner Werte für α zwischen -90° und 90°. Negative Winkel bedeuten dabei negative Steigung, positive Winkel positive Steigung:





a) Zunächst die Nullstellen der Funktionen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \qquad x_{2,3} = \pm 3$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{18}x^2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0 \qquad x_{5,6} = \pm 6$$

Für den Schnittwinkel der Tangenten mit den x-Achsen benötigen wir nur deren Steigung, nicht unbedingt die kompletten Tangentengleichungen, da $m = \tan\alpha$.
Die Steigungen den Tangenten erhalten wir mit den Ableitungsfunktionen, also

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2} \qquad g'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 2$$

Die Tangentensteigungen in den Nullstellen sind:

$f'(-3) = 5{,}5 \Rightarrow 5{,}5 = \tan\alpha$
$\Rightarrow \alpha_1 \approx 79{,}7°$

$f'(0) = -0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 = \tan\alpha$
$\Rightarrow \alpha_2 \approx -26{,}6° = 153{,}4°$

$f'(3) = 5{,}5 \Rightarrow 5{,}5 = \tan\alpha$
$\Rightarrow \alpha_3 \approx 79{,}7°$

$g'(-6) = -4 \Rightarrow -4 = \tan\alpha$
$\Rightarrow \alpha_4 \approx -76{,}0° = 104{,}0°$

$g'(0) = 2 \Rightarrow 2 = \tan\alpha$
$\Rightarrow \alpha_5 \approx 63{,}4°$

$g'(3) = -4 \Rightarrow -4 = \tan\alpha$
$\Rightarrow \alpha_6 \approx 104°$

b) aus der vorigen Teilaufgabe weiß man bereits eine Schnittstellen, die gemeinsame Nullstelle x = 0. Eventuell gibt es noch weitere!

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{9}x^3 - \frac{x}{2} = -\frac{1}{18}x^3 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{18}x^3 - \frac{5}{2}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(\frac{5}{18}x^2 - \frac{5}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_7 = 0 \ ; \ x_{8,9} = \pm 3$$

Die beiden Funktionen schneiden sich also genau in den Nullstellen der Funktion f.
Die Schnittwinkel der Tangenten miteinander ergeben sich aus den einzelnen Schnittwinkeln der Tangenten mit der x-Achse:

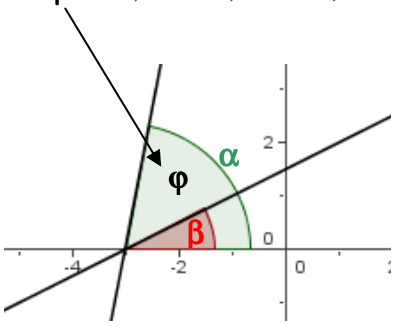
am Punkt (-3 / 0) :

$f'(-3) = 5{,}5 \ \Rightarrow \ \alpha \approx 79{,}7° \ ; \ g'(-3) = 0{,}5 \ \Rightarrow \ \beta \approx 26{,}5° \ \Rightarrow \ \varphi = 79{,}7° - 26{,}6° = 53{,}1°$

analog

am Punkt (0 / 0) : $\varphi = 153{,}4° - 63{,}4° = 90°$

am Punkt (3 / 0) siehe Punkt (-3 / 0)



c) die Tangente ist waagrecht, wenn g'(x) = 0 an der entsprechenden Stelle

$$g'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x_{10,11} = \pm 2\sqrt{3}$$

der x-Wert soll positiv sein, also betrachten wir die Stelle $x_{10} = +2\sqrt{3}$.
Der zugehörige Punkt auf dem Graphen hat den y-Wert

$$g(2\sqrt{3}) = \frac{2}{9}(2\sqrt{3})^3 - \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot 12}{9} \cdot 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \frac{16}{3}\sqrt{3} - \sqrt{3} = \frac{13}{3}\sqrt{3}.$$

Die waagrechte Tangente besitzt also die Gleichung $y = \frac{13}{3}\sqrt{3}$