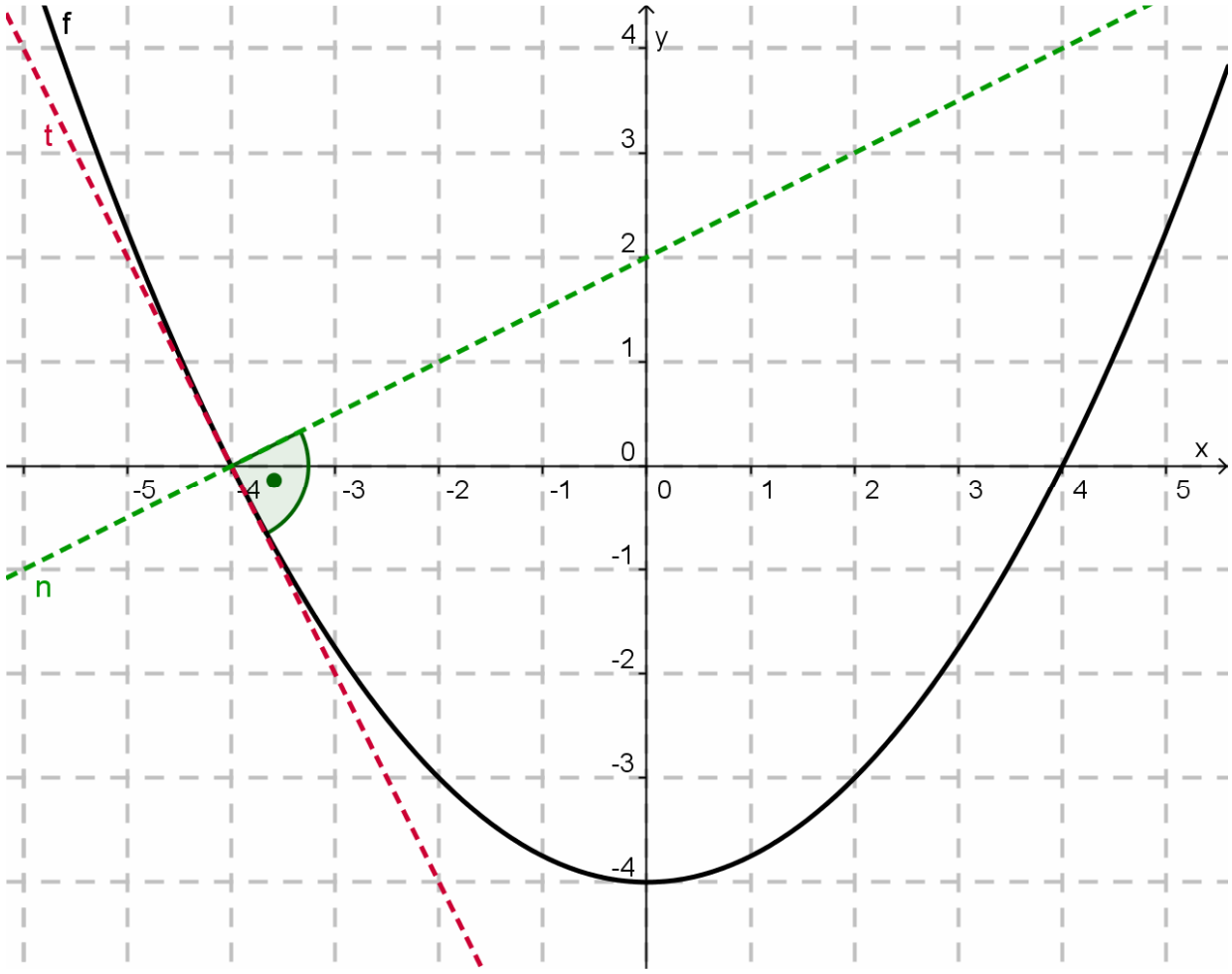
3. Differenzierbarkeit, Tangente und Normale

Wir betrachten die Funktion mit der Funktionsvorschrift f: $x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 4$; $x \in [-5;5]$

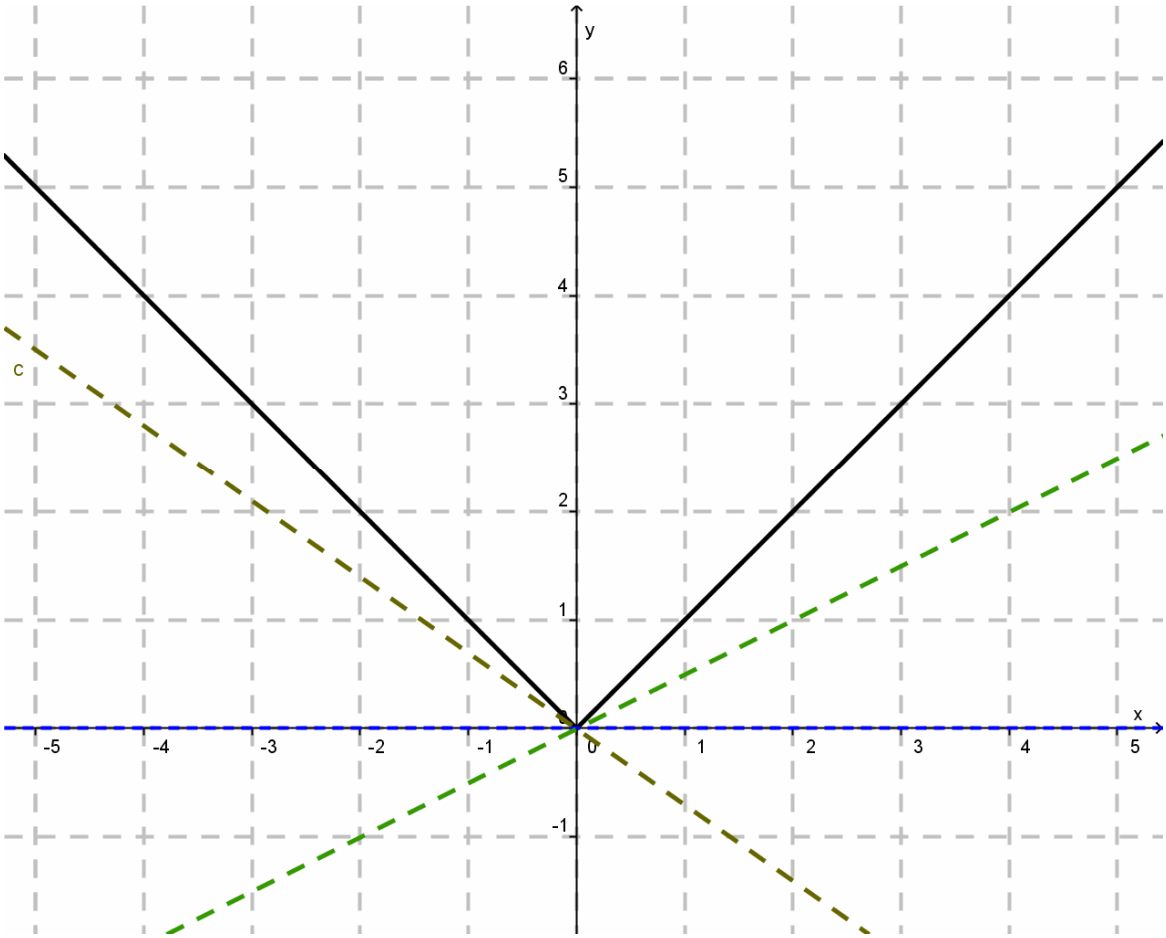


An der Stelle $x_0 = -4$ besitzt der Graph eine Tangente mit der Gleichung $y = -2x - 8$. Wir sagen, die Funktion ist differenzierbar an der Stelle $x_0 = -4$ und der Wert des Differentialquotienten

$$\lim_{x \to -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \lim_{x \to -4} \frac{(\frac{1}{4}x^2 - 4) - 0}{x + 4} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polynomdivision}}}{=} \lim_{x \to -4} (\frac{1}{4}x - 1) = -2$$

gibt die Steigung der Tangenten an der Stelle $x_0 = -4$ an.
Genauso könnten wir an jeder beliebigen Stelle des Graphen von f den Wert des Differentialquotienten berechnen; G_f hat an jeder beliebigen Stelle eine eindeutig definierte Tangente. Wir sagen, die Funktion f ist in D_f differenzierbar.

Nun betrachten wir die Funktion g: $x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{, wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{, wenn } x < 0 \end{cases}$ (Betragsfunktion)



An der Stelle $x_0 = 0$ besitzt der Graph keine eindeutig zu definierende Tangente . Wir sagen, die Funktion ist <u>nicht differenzierbar</u> an der Stelle $x_0 = 0$.

An der Stelle $x_0 = 0$ existiert kein Differentialquotient, denn

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - 0}{x} \quad \text{existiert nicht, weil} \quad \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } x > 0 \\ -1 & \text{, wenn } x < 0 \end{cases}$$

"Graphen mit Knick sind an diesen Stellen nicht differenzierbar".

Die Funktion g: $x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{, wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{, wenn } x < 0 \end{cases}$ ist bis auf die Stelle $x_0 = 0$ überall differenzierbar, nicht aber differenzierbar für $x_0 = 0$.

Einschub

Definition: Eine <u>Normale</u> ist eine Gerade, die in einem Punkt des Graphen senkrecht auf der Tangente steht.

Im Einführungsbeispiel dieses Kapitels ist die Normale zur Tangente im Kurvenpunkt (–4/0) durch die Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 2$ gegeben, denn

$m_n \cdot m_t = -1$, d.h. $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

Außerdem liegt der Punkt P(–4/0) auf der Normalen: einsetzen in die Gleichung der Normalen $y = m_n x + t$ liefert : $-4 = \frac{1}{2} \cdot (-4) + t$ oder: $t = -2$

Normale n im Beispiel: $y = \frac{1}{2}x - 2$

<u>Aufgabe:</u> Bestimme die Gleichung der Normalen im Kurvenpunkt Q(2/?)

Lösungsidee:
- Kurvenpunkt Q(2/–3)
- Berechne den Wert des Differentialquotienten an der Stelle $x_0 = 2$ (m = 1)
- Ermittle die Steigung der Normalen ($m_n = -1$)
- Stelle die Gleichung der Geraden durch Q(2/–3) mit $m_n = -1$ auf (n: $y = -x - 1$)