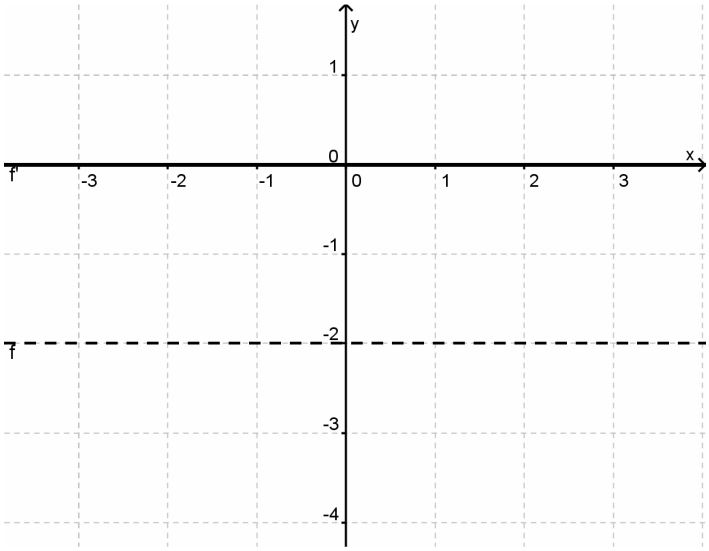
6. Ableitungsregeln: Teil 1

a) Ableitungsfunktion der Potenzfunktionen: $x \to x^n$

Beispiele:

a) $f(x) = c \;,\; c \in \mathbb{R}$

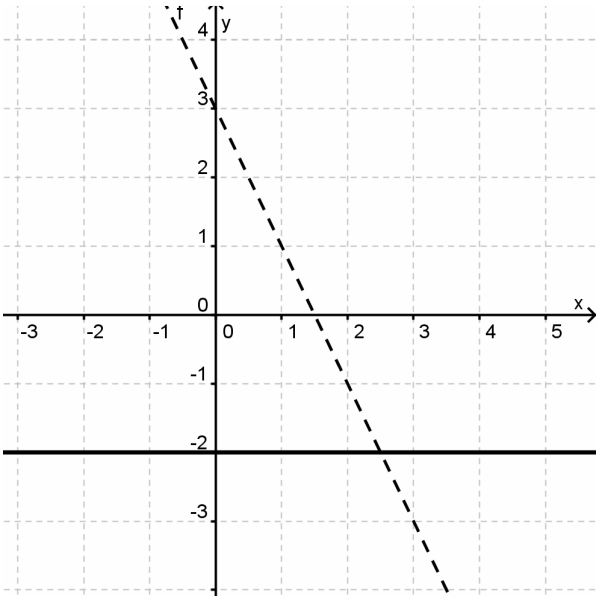


Die Ableitung einer konstanten Funktion z. B. $f(x) = -2$ ist : $f'(x) = 0$.

Geometrisch: Steigung von $G_f = 0$.

allgemein: $f(x) = c \cdot x^0 = c \Rightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = -2x + 3$

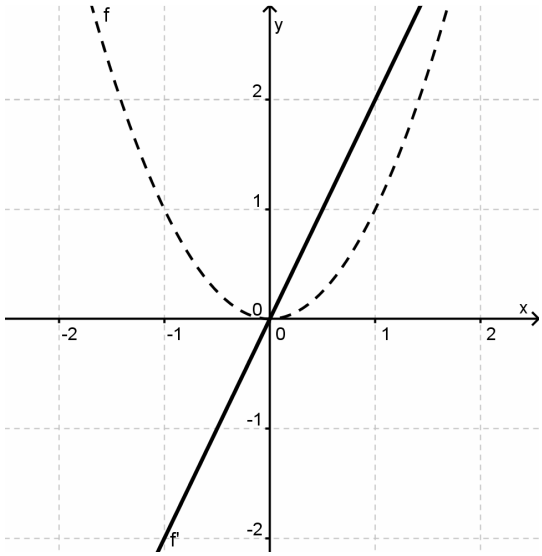


Die Ableitung der linearen Funktion, z. B. $f(x) = -2x + 3$, ist die Steigung dieser Funktion: hier: $f'(x) = -2$.

Geometrisch: Steigung von G_f ist überall konstant $(m = -2)$

allgemein: $f(x) = m \cdot x^1 + t \Rightarrow f'(x) = m$

c) $f(x) = x^2$



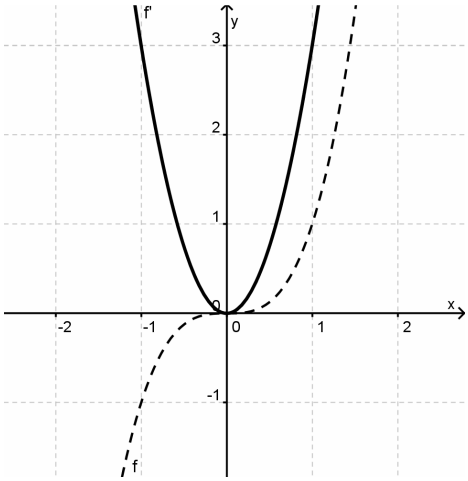
Die Ableitungsfunktion zu der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$ ist scheinbar eine Gerade mit der Gleichung : f '(x) = 2x .

Herleitung : Die Ableitungsfunktion erhalten wir mit Hilfe des Differentialquotienten an der Stelle x_o: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^{\ 2}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$

Polynomdivision bzw.
Binomische Formel

Wählen wir nun statt der Variablen x_0 wieder die Variable x , so erhalten wir :
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

d) $f(x) = x^3$



Die Ableitungsfunktion zu der quadratischen Funktion $f(x) = x^3$ ist scheinbar eine Parabel mit Gerade mit der Gleichung : $f'(x) = 3x^2$.

Herleitung : Die Ableitungsfunktion erhalten wir mit Hilfe des Differentialquotienten an der Stelle x_0: $f'(x_0) =$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polynomdivision}}}{=} \lim_{x \to x_0} (x^2 + x_0 \cdot x + x_0^2) = 3x_0^2$$

Wählen wir nun statt der Variablen x_0 wieder die Variable x , so erhalten wir :
$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

allgemein :

Für die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $f(x) = x^n$ gilt $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Beispiele: a) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

b) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

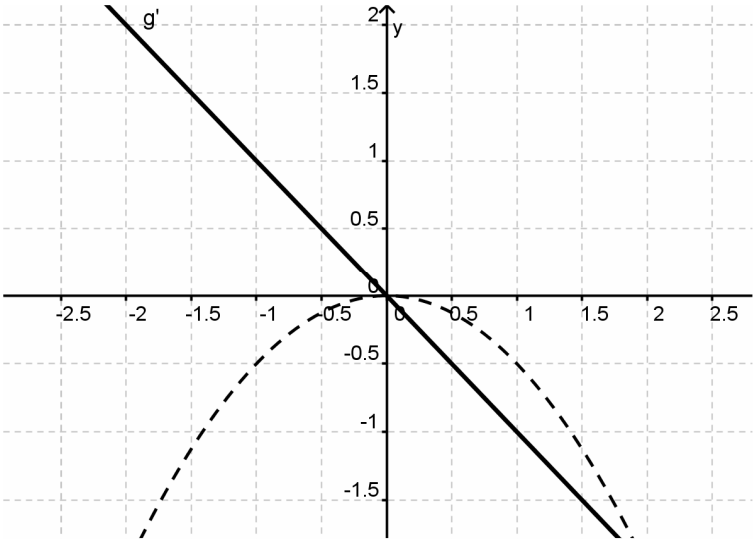
c) $f(x) = x^{1,5} \Rightarrow f'(x) = 1,5x^{1,5-1} = 1,5x^{0,5} = 1,5\sqrt{x}$

<u>b) Faktorregel</u> : Ableitung der Funktion $c \cdot f(x)$

Beispiel:

Betrachte die Funktion

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$



Die Ableitungsfunktion g'(x) besitzt die Gleichung: $g'(x) = -x$

allgemeine Herleitung:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} c \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_o)$$

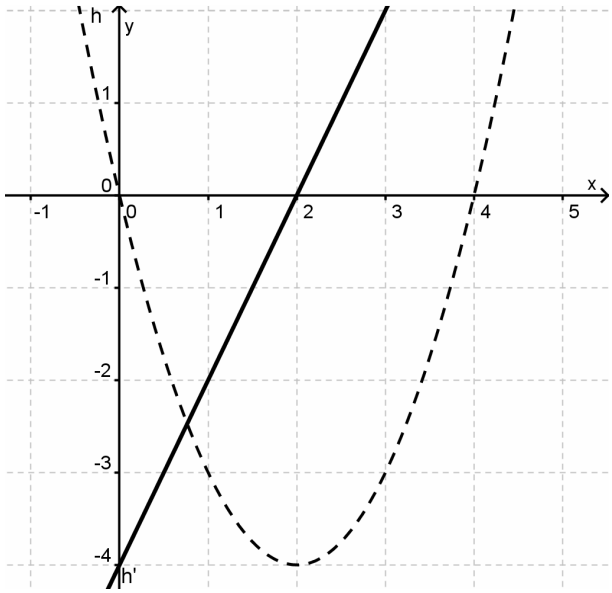
Faktorregel:

Für die Ableitung der Funktion $g(x) = c \cdot f(x)$ gilt: $g'(x) = c \cdot f'(x)$

In unserem Beispiel : $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x^{2-1} = -2x$

<u>c) Summenregel</u> : Ableitung der Funktion $f(x) \pm g(x)$

Beispiel: Betrachte die Funktion $h(x) = x^2 - 4x$



Die Ableitungsfunktion h'(x) besitzt graphisch die Gleichung: $h'(x) = 2x - 4$

allgemeine Herleitung:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0) + (g(x) - (g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{(g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) =$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) + \lim_{x \to x_0} \left(\frac{(g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_o) + g'(x_0)$$

Summenregel:

Für die Ableitung der Funktion h(x) = f(x) ± g(x) gilt: h ’(x) =· f ‘(x) ± g’(x)

In unserem Beispiel : h(x) = $x^2 - 4x^1$ $\Rightarrow$ h’(x) = $2x^{2-1} - 4 \cdot 1x^{1-1}$ = 2x – 4

<u>d) Produktregel</u>: Ableitung der Funktion f(x) = u(x) · v(x)

Beispiel: $f(x) = (x+1) \cdot (x-1)$

Versuch: Leite jeden Faktor einzeln ab. (Analog zur Summenregel!)

$$f'(x) = 1 \cdot 1 = 1$$

Offensichtlich liefert das getrennte Ableiten der einzelnen Faktoren ein falsches Ergebnis, da der Graph einet quadratischen Funktion keine konstante Steigung 1 besitzt.

,
Bei Produkten dürfen wir nicht die Faktoren einzeln ableiten!!!

Produktregel:

Für die Ableitung der Funktion f(x) = u(x) · v(x) gilt: f ’(x) = u’(x) · v(x) + u(x) · v’(x)

Im Bsp: $f(x) = (x+1) \cdot (x-1)$ $\rightarrow$ $f'(x) = (x+1)' \cdot (x-1) + (x+1) \cdot (x-1)'$

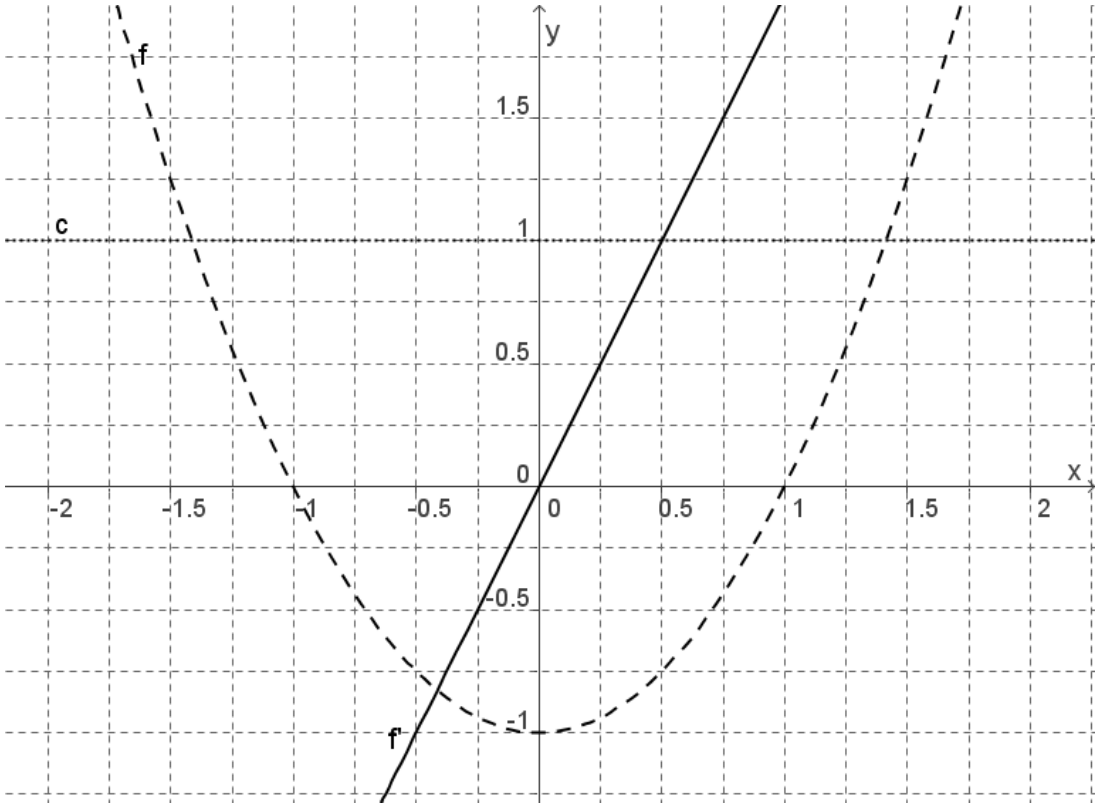
$$= 1 \cdot (x-1) + (x+1) \cdot 1 \quad \underline{\underline{= 2x}}$$

Beweis der Produktregel: (Buch S. 53)

Wir überprüfen die Produktregel für das vorgestellte Beispiel, indem wir die Funktion erst ausmultiplizieren und dann mit den bereits bekannten Regeln ableiten:

$f(x) = (x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$ $\rightarrow$ $\underline{\underline{f'(x) = 2x}}$ ✓

Graphen:



<u>e) Quotientenregel</u>: Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

Beispiel: $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$

Versuch: Leite Zähler und Nenner einzeln ab.

$$f'(x) = -\frac{1}{1} = -1$$

Offensichtlich liefert das getrennte Ableiten von Zähler und Nenner nicht die richtige Ableitung, da der Graph der gebrochen-rationalen Funktion nicht die Steigung – 1 besitzt.

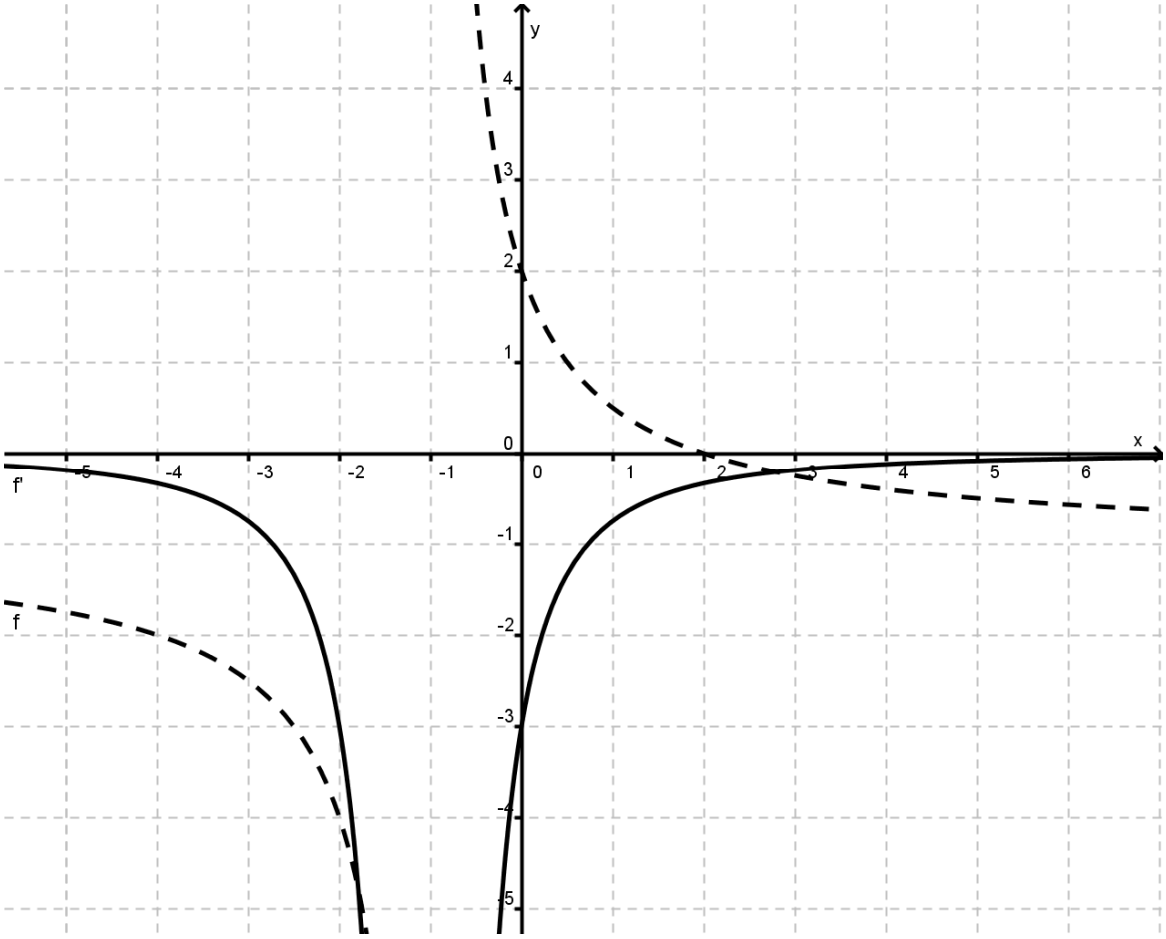
Bei Quotienten Produkten dürfen wir nicht Zähler und Nenner einzeln ableiten!!!

Quotientenregel:

Für die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ gilt: $f'(x) = \dfrac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$

Im Bsp:

$$f(x) = \frac{2-x}{x+1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1(x+1)-(2-x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1-2+x}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} = -\frac{3}{(x+1)^2}$$

Beweis der Quotientenregel: (Buch S. 54)

Graphen: Überprüfung am Graphen