Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	S.66
11	Üben	XX	Monotonie	5

a) $f(x)=4x+x^2 \rightarrow f'(x)=4+2x$

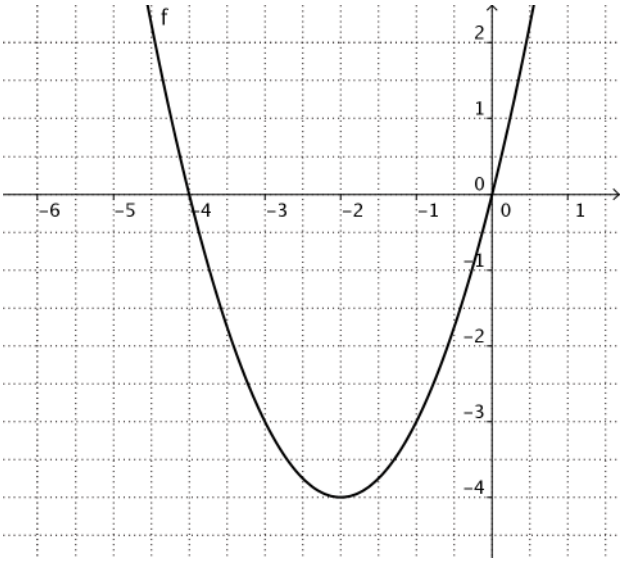
Die Ableitungsfunktion kann (wie jede Funktion), wenn überhaupt, nur da ihr Vorzeichen wechseln, wo sie Null wird oder an Definitionslücken (die hier nicht vorliegen).
Also sucht man zuerst die Nullstellen der Ableitungsfunktion:

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4+2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0=-2$$

Es entstehen durch die Grenze x_0 zwei Monotonieintervalle:

		-2	
f '	-		+
f	smf		sms
	↘		↗
		TIP (- 2 / - 4)	

Zur Bestimmung des Vorzeichens der Ableitung in den beiden Intervallen setzt man am besten einen einfachen Wert aus diesem Intervall ein, z.B. f '(-4) = - 4 , also negativ, f ' (0) = 4 , also positiv!
f ist also smf für $x \in]-\infty;-2]$ und sms für $x \in [-2;\infty[$, da hier die Ableitungsfunktion negativ bzw. positiv ist.

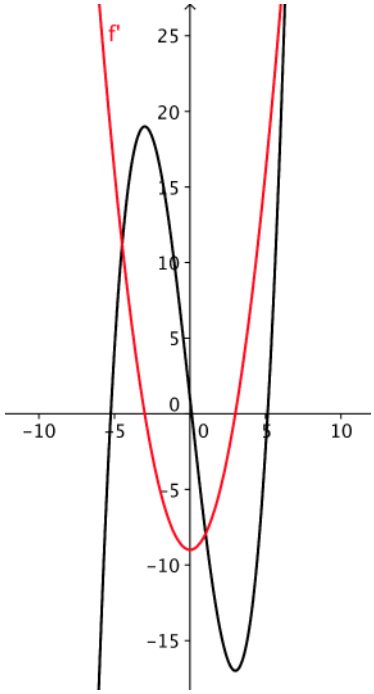


b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+1 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2}=\pm 3$

		-3		3	
f '	+		−		+
f	sms		smf		sms
	↗	HOP(- 3/19)	↘	TIP(3/- 17)	↗

z.B. $f'(-4) = 7 > 0$
$f'(0) = -9 < 0$
$f'(4) = 7 > 0$

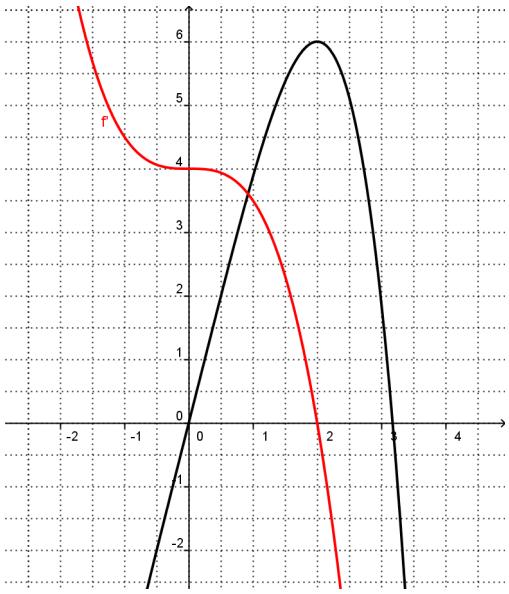


c) $f(x)=-\frac{1}{8}x^4+4x \quad \Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{1}{2}x^3+4$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3=8 \quad \Leftrightarrow \quad x_0=+2$

		2	
f '	+		-
f	sms		smf
	↗	HOP(2/6)	↘

z.B. $f'(0) = 4 > 0$
$f'(3) = -9{,}5 < 0$

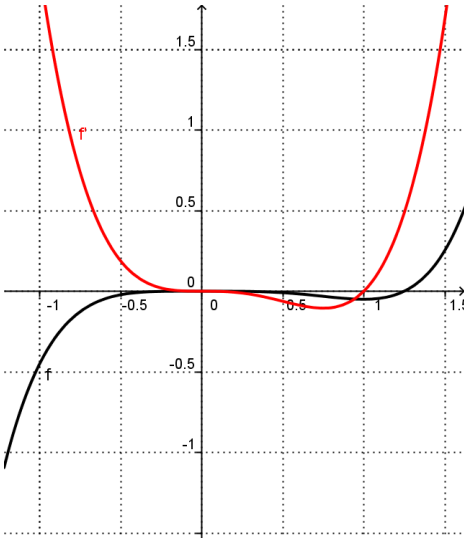


d) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4 \Rightarrow f'(x)=x^4-x^3=x^3(x-1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=0\ ;\ x_2=1$

		0		1	
f '	+		−		+
f	sms		smf		sms
	↗		↘		↗
		HOP(0/0)		TIP(1/-0,05)	

z.B. f ' (-1) = 2
f ' (0,5) = -0.0625
f ' (2) = 8



e) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}\ ;\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

f ' besitzt die selbe Definitionsmenge wie f

$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-4)-1\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}\ ;\ D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x=0 \Leftrightarrow x_0=0$

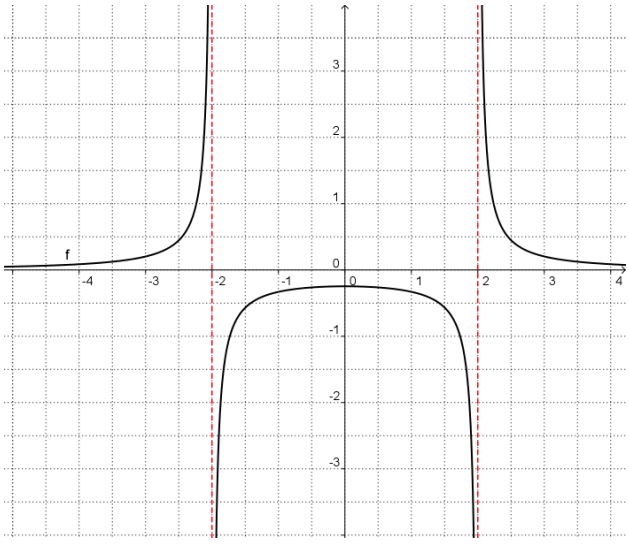
Die eine Nullstelle der Ableitung und die zwei Definitionslücken (hier Polstellen) führen zu vier Monotonieintervallen!

		-2		0		2	
f '	+		+		-		-
f	sms		sms		smf		smf
	↗		↗		↘		↘
				HOP(0/-0,25)			

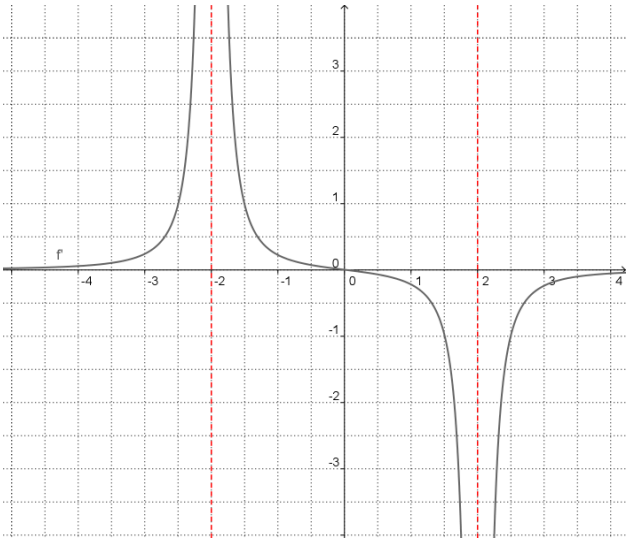
z.B. f ' (-3) > 0
f ' (-1) > 0
f ' (1) < 0
f' (3) < 0

Hinweis: Eine Polstelle, bei der die Funktion ihr Monotonieverhalten nicht ändert, muss eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel sein! Vgl. der Verlauf des Graphen:

Graph f



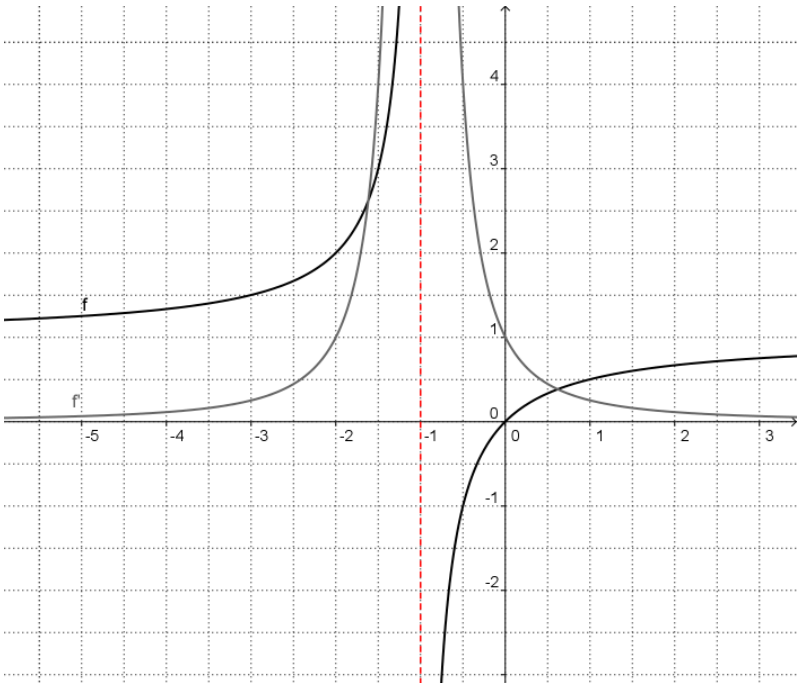
Graph f '



f) $f(x)=\frac{x}{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$; $D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

f ' (x) besitzt keine Nullstellen, ein möglicher Wechsel des Monotonieverhaltens kann also nur an der Definitionslücke vorliegen:

		-1	
f '	+		+
f	sms ↗		sms ↗

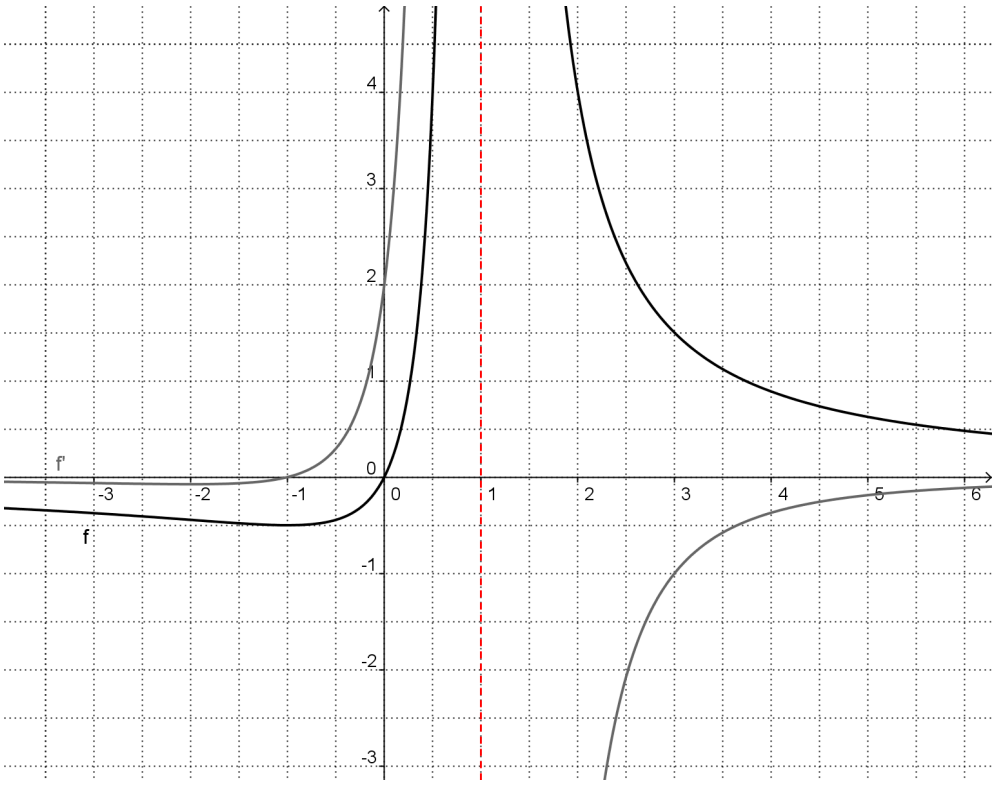


g) $f(x)=\frac{2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2(x-1)^2-2x(2x-2)}{(x-1)^4}=\frac{-2x^2+2}{(x-1)^4}=\frac{-2(x^2-1)}{(x-1)^4}=\frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$;

$D_f=D_{f'}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2(x+1)=0 \Leftrightarrow x_0=-1$

		-1		1	
f '	-		+		-
f	smf		sms		smf
	↘		↗		↘
		TIP(-1/-0,5)			



Hinweis:

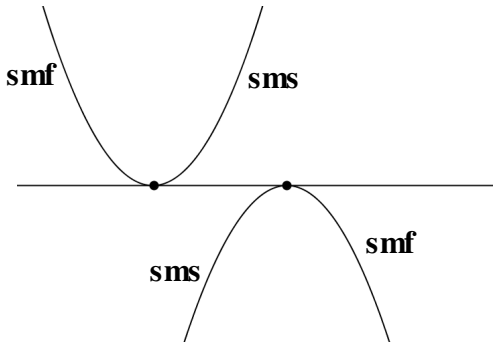
Hier zeigt sich, dass sich an einer Polstelle ohne Vorzeichenwechsel das Monotonieverhalten ändern muss, die Ableitungsfunktion also an der selben Stelle eine Polstelle **mit** Vorzeichenwechsel besitzt!

h) $h(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{x^2}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad h'(x)=\frac{2x(x^2+2x+1)-x^2(2x+2)}{(x+1)^4}=\frac{2x^2+2x}{(x+1)^4}=\frac{2x}{(x+1)^3}$

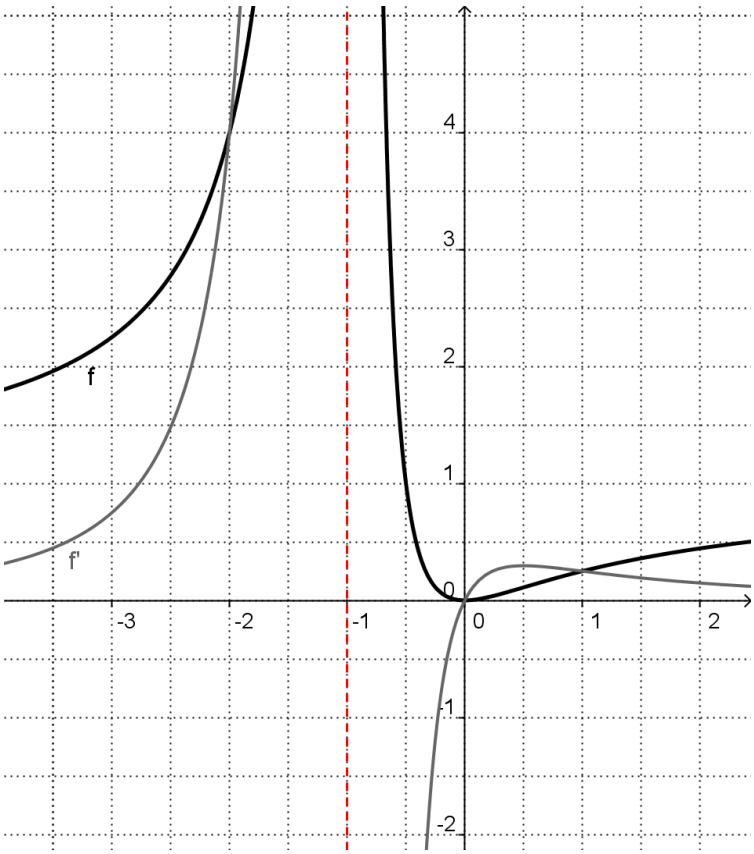
$D_h=D_{h'}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Vorüberlegung: h besitzt eine doppelte Polstelle bei x = -1, also eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Hier muss sich das Monotonieverhalten also ändern.

Die Nullstellen von h und h ' sind jeweils $x_0 = 0$.
Für h(x) ist diese Nullstelle doppelt, der Graph von h berührt die x-Achse also nur. Somit ändert sich hier das Monotonieverhalten (man denke z.B. an eine Parabel, deren Scheitel auf der x-Achse liegt).



Überprüfen wir die Vorüberlegung anhand der Monotonieintervalle:

f '	+	-1	-	0	+
f	sms		smf		sms
	↗		↘		↗

TIP(0/0)