Klasse 11	Art Üben	Schwierigkeit X	Thema Kurvendiskussion	Aufg.

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$ mit $D=\mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

a) Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten von G_f sowie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Nullstelle von f an.

b) Bestimmen Sie die Lage und Art der Extrempunkte von G_f.

Zur Zeit x = 0 Stunden geht während eines Gewitters ist ein kurzer, heftiger **Platzregen** nieder. Die Funktion w mit $w(x)=8\cdot f(x)+1$ und x>1 beschreibt die **Wassermenge** in **hl/s**, die ein **Gebirgsbach** zum Zeitpunkt x Stunden führt. Der Graph der Funktion w ist G_w.

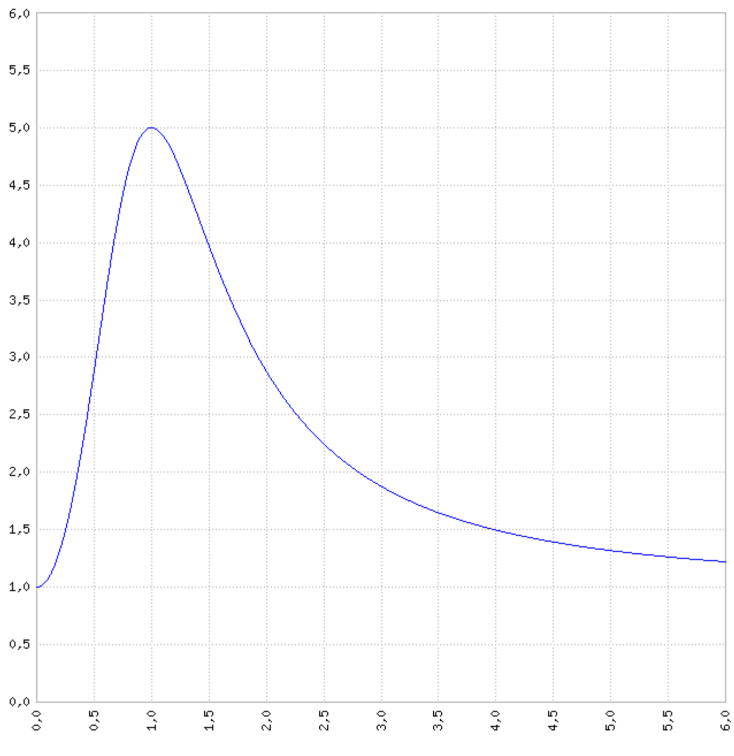
c) Beschreiben Sie, wie der Graph von w aus dem Graphen von f hervorgeht und skizzieren Sie den Graphen G_w mit Hilfe der Zwischenergebnisse der vorstehenden Teilaufgaben. Vergleichen Sie Ihre Skizze mit einem Funktionsplot. **tinyurl.com/q11mch**

d) Zu welchem Zeitpunkt führt der Bach am meisten Wasser? (Kurze Begründung!)
Geben die Wassermenge zu diesem Zeitpunkt in hl/s an.

e) Entnehmen Sie dem Funktionsplot, wann die momentane Änderungsrate des Wasserstroms null, wann diese (in etwa) am größten und wann am kleinsten ist. (Kurze Begründung!)

f) Skizzieren Sie in das Koordinatensystem von Teilaufgabe c) den Graphen $G_{w'}$, der Funktion w', die die momentane Änderungsrate des Wasserstroms in Abhängigkeit von der Zeit x beschreibt.

g) Wie viel Wasser wird der Bach nach mehreren regenfreien Tagen führen?



Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	
11	Üben	X	Kurvendiskussion	Lösung

a) f(-x)=f(x) → Symmetrie zur y-Achse, da das negative Vorzeichen sowohl im Nenner als auch im Zähler verschwindet (gerade Potenzen)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^4+1} = 0$$

Wegen der Symmetrie sind beide limes gleich.

$$\frac{x^2}{x^4+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ ist die einzige Nullstelle.}$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$ →

$$f'(x) = \frac{2x(x^4+1) - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{2x^5 + 2x - 4x^5}{(x^4+1)^2} = \frac{2x - 2x^5}{(x^4+1)^2} = \frac{2x(1-x^4)}{(x^4+1)^2} = \frac{2x(1+x^2)(1-x^2)}{(x^4+1)^2}$$

(binom. F.)

Stellen mit waag. Tangenten: $f'(x) \overset{!}{=} 0$ → $2x(1+x^2)(1-x^2)=0$ → $x = 0,\ x = 1,\ x = -1$

x		-1		0		1	
f'(x)	+		–		+		–
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗	HOP	↘

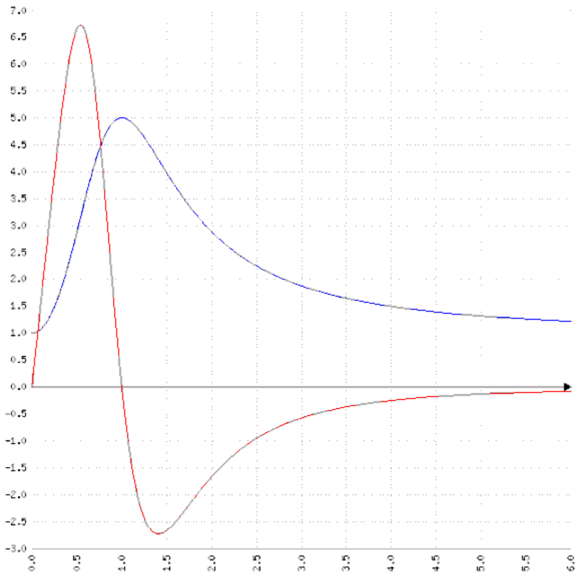
f(–1) = 0,5; f(0) = 0; f(1) = 0,5

Extrempunkte: Hochpunkt A(–1|0,5), Tiefpunkt B(0|0) und Hochpunkt C(1|0,5)

c) G_f wird auf die achtfache Höhe (mit Faktor 8 in y-Richtung) gestreckt und danach um eine Einheit nach oben (+1 in pos. y-Richtung) verschoben. (SSV!)

(Bei der Zeichnung beachte man: D, HOP und TIP und lim!)

d) 1 Stunde nach dem Platzregen führt der Gebirgsbach eine „Wassermenge“ von 5 hl/s. Das ist das auftretende Maximum. (der HOP von f wird verachtfacht: 0,5·8=4 und um eins erhöht: 4+1=5; in x Richtung bleibt es bei der 1)



e) f'(x)=0 bei x=0 und bei x=1 (waag. Tangenten)
f'(x) →Max bei x=0,5 (steilste Stelle; Krümmungswechsel)
f'(x) →Min bei x=1,4 (dto.)

f) s. Abb.

g) Der Grenzwert von f war y=0; verachtfachen ist wirkungslos; um eins erhöhen bewirkt y=1. Nach einigen Tagen wird der Gebirgsbach eine „Wassermenge“ von 1 hl/s führen.