Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	S. 83
11	**Üben**	**XX**	**Anwendung der Ableitungsfunktion**	**5**

a) $f(x) = x^2 + 3x - \frac{1}{x}$

Von der Funktion ist bekannt, dass sie genau ein Extremum besitzt. Die Extremstelle findet man mit Hilfe der ersten Ableitung, da der Graph an dem Extrempunkt eine waagrechte Tangente besitzt. Die Steigung ist an der Extremstelle also null.

Gesucht ist die Stelle x* mit der Steigung m = 0, also:

f'(x*) = 0 $\quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3 + \frac{1}{x^2} = 0$ (1)

Betrachtet man die linke Seite von Gleichung (1) als Term einer neuen Funktion $g(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x^2}$ (der Name g ist frei gewählt), so kann Gleichung (1) auch als Suche nach Nullstellen der Funktion g aufgefasst werden.

Dies kann näherungsweise mit dem Newton-Verfahren geschehen:

$g(x) = 2x + 3 + \frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad g'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

Um einen passenden Startwert zu finden erstellen wir eine Wertetabelle:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	–6,96	–4,94	–2,89	–0,75	2,00	$0 \notin D$	6,00	7,25	9,11	11,06	13,04

Die Nullstelle liegt offensichtlich im Intervall [–2; –1], da das Vorzeichen der Funktionswerte hier wechselt. Links von –2 liegt der Graph unterhalb der x-Achse, rechts von –1 oberhalb. Eine weitere Nullstelle gibt es laut Angabe nicht.

Als Startwert für die beiden in der Aufgabe geforderten Iterationsschritte verwenden wir deshalb $\mathbf{x_0 = -1{,}5}$

Kontrolle: Da der linke Funktionswert bei x = –2 unterhalb von dem rechten Funktionswert bei x = –1 liegt, muss das Steigungsvorzeichen bei dem Startwert x_0 = –1,5 positiv sein!
g'(–1,5) = 2,59… > 0 $\quad \rightarrow$ richtiges Steigungsvorzeichen

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} \approx -1{,}5 - \frac{0{,}44...}{2{,}59...} \approx -1{,}6697...$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \approx -1{,}6697.... - \frac{0{,}01929...}{2{,}42...} \approx -1{,}6776... \approx \underline{\underline{-1{,}68}}$$

Test: $f'(x_2) = 2 \cdot (-1{,}68) + 3 + \frac{1}{(-1{,}68)^2} \approx -000569$

Unsere Stelle x_2 liefert in der ersten Ableitung also fast null und damit fast eine waagrechte Tangente. Die Extremstelle von f liegt demnach nahe bei x_2.

83/5b) $f(x) = 2x^2 - x + \frac{1}{x}$

Von der Funktion ist bekannt, dass sie genau ein Extremum besitzt. Die Extremstelle findet man mit Hilfe der ersten Ableitung, da der Graph an dem Extrempunkt eine waagrechte Tangente besitzt. Die Steigung ist an der Extremstelle also null.

Gesucht ist die Stelle x* mit der Steigung m = 0, also:

f'(x*) = 0 $\quad \Leftrightarrow \quad 4x - 1 - \frac{1}{x^2} = 0$ (1)

Betrachtet man die linke Seite von Gleichung (1) als Term einer neuen Funktion $g(x) = 4x - 1 - \frac{1}{x^2}$ (der Name g ist frei gewählt), so kann Gleichung (1) auch als Suche nach Nullstellen der Funktion g aufgefasst werden.

Dies kann näherungsweise mit dem Newton-Verfahren geschehen:

$g(x) = 4x - 1 - \frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad g'(x) = 4 + \frac{2}{x^3}$

Um einen passenden Startwert zu finden erstellen wir eine Wertetabelle:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	-21,04	-17,1	-13,11	-9,25	-6,0	$0 \notin D$	2,00	6,75	10,89	14,94	18,96

Die Nullstelle liegt zwischen –1 und 1 da das Vorzeichen der Funktionswerte hier wechselt. Da in diesem Intervall aber auch die Definitionslücke x = 0 liegt müssen wir noch prüfen, ob die Nullstelle links oder rechts von 0 liegt. Dazu ergänzen wir die Wertetabelle durch zwei Stellen, die nahe an der Definitionslücke liegen.

x	-1	-0,1	0	0,1	1
g(x)	-6,0	-101	$0 \notin D$	-100	2,00

Die Nullstelle liegt offensichtlich im Intervall [0,1; 1], da das Vorzeichen der Funktionswerte hier wechselt.

Als Startwert verwenden wir deshalb $\mathbf{x_0 = 0{,}5}$

Kontrolle: Da der linke Funktionswert bei x = 0,1 unterhalb von dem rechten Funktionswert bei x = 1 liegt, muss das Steigungsvorzeichen bei dem Startwert x_0 = 0,5 positiv sein!
g'(0,5) = 20 > 0 $\quad \rightarrow$ *richtiges Steigungsvorzeichen*

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{-3...}{20} = 0{,}6$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \approx 0{,}6 - \frac{-1{,}377...}{13{,}25.....} \approx \underline{0{,}71}$$

Test: $f'(x_2) = 4 \cdot (0{,}71) - 1 - \frac{1}{(0{,}71)^2} \approx 0$

Unsere Stelle x_2 liefert in der ersten Ableitung also fast null und damit fast eine waagrechte Tangente. Die Extremstelle von f liegt demnach nahe bei x_2.

83/5c) $f(x) = \frac{x^3 + 4x}{6x - 12}$

Von der Funktion ist bekannt, dass sie genau ein Extremum besitzt. Die Extremstelle findet man mit Hilfe der ersten Ableitung, da der Graph an dem Extrempunkt eine waagrechte Tangente besitzt. Die Steigung ist an der Extremstelle also null.

Gesucht ist die Stelle x* mit der Steigung m = 0, also:

$f'(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12x^3 - 36x^2 - 48}{(6x-12)^2} = 0$ Definitionslücke: x = 2

→ Zähler null setzen!!!

$12x^3 - 36x^2 - 48 = 0 \quad || :12$

$x^3 - 3x^2 - 4 = 0$ (1)

Betrachtet man die linke Seite von Gleichung (1) als Term einer neuen Funktion $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4$ (der Name g ist frei gewählt), so kann Gleichung (1) auch als Suche nach Nullstellen der Funktion g aufgefasst werden.

Dies kann näherungsweise mit dem Newton-Verfahren geschehen:
$g(x) = x^3 - 3x^2 - 4 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 3x^2 - 6x$

Um einen passenden Startwert zu finden erstellen wir eine Wertetabelle:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	-204	-116	-58	-24	-8	-4	-6	-8	-4	12	46

Die Nullstelle liegt offensichtlich im Intervall [3; 4], da das Vorzeichen der Funktionswerte hier wechselt.
(Bemerkung: Die Definitionslücke x = 2 von f' liegt nicht im Intervall [3; 4]. Deswegen müssen keine weiteren Werte berechnet werden.)

Als Startwert für die beiden in der Aufgabe geforderten Iterationsschritte verwenden wir deshalb $\mathbf{x_0 = 3{,}5}$

Kontrolle: Da der linke Funktionswert bei x = 3 unterhalb von dem rechten Funktionswert bei x = 4 liegt, muss das Steigungsvorzeichen bei dem Startwert x_0 = 3,5 positiv sein!
g'(3,5) = 15,75 > 0 → richtiges Steigungsvorzeichen

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 3{,}5 - \frac{2{,}125}{15{,}75} \approx 3{,}36507...$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \approx \underline{\underline{3{,}36}}$$

83/5d) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x}{x-1}$

Von der Funktion ist bekannt, dass sie genau ein Extremum besitzt. Die Extremstelle findet man mit Hilfe der ersten Ableitung, da der Graph an dem Extrempunkt eine waagrechte Tangente besitzt. Die Steigung ist an der Extremstelle also null.

Gesucht ist die Stelle x* mit der Steigung m = 0, also:

$f'(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x^3 - 6x^2 + 3}{(x-1)^2} = 0$ Definitionslücke: x = 1

→ Zähler null setzen!!!

$4x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ (1)

Betrachtet man die linke Seite von Gleichung (1) als Term einer neuen Funktion $g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3$ (der Name g ist frei gewählt), so kann Gleichung (1) auch als Suche nach Nullstellen der Funktion g aufgefasst werden.

Dies kann näherungsweise mit dem Newton-Verfahren geschehen:
$g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3 \quad \rightarrow \quad g'(x) = 12x^2 - 12x$

Um einen passenden Startwert zu finden erstellen wir eine Wertetabelle:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
g(x)	-647	-349	-159	-53	-7	3	1	11	57	163	353

Die Nullstelle liegt offensichtlich im Intervall [–1; 0], da das Vorzeichen der Funktionswerte hier wechselt.
(Bemerkung: Die Definitionslücke x = 1 von f' liegt nicht im Intervall [–1; 0]. Deswegen müssen keine weiteren Werte berechnet werden.)

Als Startwert für die beiden in der Aufgabe geforderten Iterationsschritte verwenden wir deshalb $x_0 = -0{,}5$

Kontrolle: Da der linke Funktionswert bei x = 3 unterhalb von dem rechten Funktionswert bei x = 4 liegt, muss das Steigungsvorzeichen bei dem Startwert x_0 = 3,5 positiv sein!
g'(-0,5) = 9 > 0 → richtiges Steigungsvorzeichen

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = -0{,}5 - \frac{1}{9} \approx -0{,}6111...$$

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} \approx \underline{\underline{0{,}60}}$$