Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	S.83
11	Anwenden	X	Newton-Verfahren	6

Vorbemerkung: Wir führen das Newton-Verfahren jeweils nur einmal durch, da wir mit dem Taschenrechner arbeiten. Die geforderte Genauigkeit kann also eventuell nicht erreicht werden.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3-4$; $m=12$

Gesucht ist die Stelle x* im Intervall [2 ; 3] mit Steigung m = 12, also $f'(x^*)=12$

$\Leftrightarrow 2x^3-3x^2=12 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3-3x^2-12=0$.

Zu Lösen ist also die Gleichung $2x^3-3x^2-12=0$ (1)

Betrachtet man die linke Seite der Gleichung als Term einer neuen Funktion

$g(x)=2x^3-3x^2-12$ (der Name g ist frei gewählt), so kann die Gleichung (1) auch als Suche nach Nullstellen der Funktion g aufgefasst werden.

Dies kann näherungsweise mit dem Newton-Verfahren geschehen:

$g(x)=2x^3-3x^2-12$; $g'(x)=6x^2-6x$; Startwert $x_0=2{,}5$

$$x_1=x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=2{,}5-\frac{0{,}5}{22{,}5}=2{,}4777...\approx 2{,}478$$

Test: $f'(2{,}478)=2(2{,}478)^3-3(2{,}478)^2=12{,}01078.....$

b) $f(x)=0{,}1x^4-x^2-x+1$; $m=1$

Für $x^*\in[2;3]$ soll gelten: $f'(x^*)=12$

$\Leftrightarrow 0{,}4x^3-2x-1=1 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}4x^3-2x-2=0$.

Setze $g(x)=0{,}4x^3-2x-2 \quad \Rightarrow \quad g'(x)=1{,}2x^2-2$; Startwert $x_0=2{,}5$

$$x_1=x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=2{,}5-\frac{-0{,}75}{5{,}5}=2{,}6363...\approx 2{,}636$$

Test: $f'(2{,}636)=0{,}4(2{,}636)^3-2\cdot 2{,}636-1=1{,}0544.....$

c) $f(x)=x^2-1+\frac{1}{x^2}$; m = 5

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}=5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-\frac{2}{x^3}-5=0$$

$$g(x)=2x-\frac{2}{x^3}-5 \quad ; \quad g'(x)=2+\frac{6}{x^4}$$

$$x_1=x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=2{,}5-\frac{-0{,}128}{2{,}1536}=2{,}5594...\approx 2{,}559$$

Test: $f'(2{,}559)=4{,}9986....$

d) Sehr rechen-aufwendige Aufgabe !!

$f(x)=\frac{x^3-x^2+x}{x-1}$; m = 4

$$f'(x)=\frac{2x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^2}=4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^3-4x^2+2x-1}{(x-1)^2}-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^3-8x^2+10x-5}{(x-1)^2}=0$$

$$g(x)=\frac{2x^3-8x^2+10x-5}{(x-1)^2} \quad ; \quad g'(x)=\frac{2x^3-6x^2+6x}{(x-1)^3}$$

$$x_1=x_0-\frac{g(x_0)}{g'(x_0)}=2{,}5-\frac{0{,}55555...}{2{,}592592...}\approx 2{,}3$$