Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	S.83
11	Anwenden	X	Newton-Verfahren	7

a) $g(x)=x^2$; $h(x)=x^3-1$

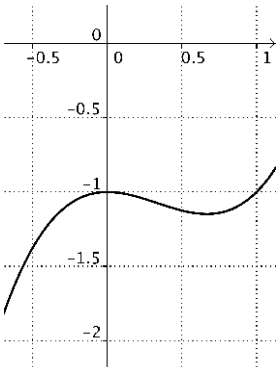
$g(x)=h(x) \Leftrightarrow x^2=x^3-1 \Leftrightarrow x^3-x^2-1=0$

Wir setzen

$k(x)=x^3-x^2-1 \Rightarrow k'(x)=3x^2-2x$

Für die Anwendung des Newton-Verfahrens benötigen wir jetzt noch einen Startwert. Eine Betrachtung der Monotoniebereiche von k liefert

		0		2/3	
k'	+		−		+
k	sms		smf		sms
	↗		↘		↗
		HOP (0 / -1)		TIP ($\frac{2}{3}$ / $-1\frac{4}{27}$)	



Dies liefert den nebenstehenden Grobverlauf des Graphen:

Die gesuchte Nullstelle liegt rechts vom Tiefpunkt,

$k(1)=-1$, $k(2)=3$

$\Rightarrow$ die Nullstelle liegt im Intervall [1 ; 2]

$\Rightarrow$ eine möglicher Startwert ist $x_0 = 1{,}5$.

$x_1=x_0-\frac{k(x_0)}{k'(x_0)}=1{,}5-\frac{0{,}125}{3{,}75}=\frac{22}{15}\approx 1{,}467$. Wir rechnen mit $x_1 = 1{,}467$ weiter:

$x_2=x_1-\frac{k(x_1)}{k'(x_1)}=1{,}467-\frac{k(1{,}467)}{k'(1{,}467)}\approx 1{,}466$

Ein sehr guter Näherungswert ist also $x^*\approx 1{,}47$

!! Hinweis: Die Erkenntnis, das die Nullstelle der Funktion im Intervall [1 ; 2] liegt, kann (wenn nicht anders gefordert) auch mit Hilfe einer Wertetabelle im Taschenrechner gewonnen werden.

b) $g(x)=x^3$; $h(x)=\frac{1}{2}x^3-2x+2$

$g(x)=h(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3+2x-2=0$

Wir setzen

$k(x)=\frac{1}{2}x^3+2x-2 \Rightarrow k'(x)=\frac{3}{2}x^2+2$

Wertetabelle mit dem Taschenrechner:

-2	-1	0	1	2
-10	-4,5	-2	0,5	6

Die Nullstelle liegt also im Intervall [0 ; 1].
=> Startwert $x_0 = 0{,}5$

$x_1=x_0-\frac{k(x_0)}{k'(x_0)}=0{,}5-\frac{-0{,}9375}{2{,}375}=0{,}89473...\approx 0{,}895$. Wir rechnen mit $x_1 = 0{,}895$ weiter:

$x_2=x_1-\frac{k(x_1)}{k'(x_1)}=0{,}895-\frac{k(0{,}895)}{k'(0{,}895)}\approx 0{,}849$

Ein sehr guter Näherungswert ist also $x^*\approx 0{,}85$

c) $x^4-2x^3=\frac{1}{x} \Rightarrow x^4-2x^3-\frac{1}{x}=0$

$k(x)=x^4-2x^3-\frac{1}{x}$; $k'(x)=4x^3-6x^2+\frac{1}{x^2}$; $D_k=D_{k'}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Wertetabelle mit dem Taschenrechner:

-2	-1	0	1	2	3
32,5	4	↯	-2	-0,5	26,7

Die Nullstelle liegt also im Intervall [2 ; 3].
=> Startwert $x_0 = 2{,}5$

$x_1=x_0-\frac{k(x_0)}{k'(x_0)}=2{,}5-\frac{7{,}4125}{25{,}16}=2{,}20538...\approx 2{,}205$. Wir rechnen mit $x_1 = 2{,}205$ weiter:

$x_2=x_1-\frac{k(x_1)}{k'(x_1)}=2{,}205-\frac{k(2{,}205)}{k'(2{,}205)}\approx 2{,}080$.

Hier ändert sich der Näherungswert im zweiten Schritt noch sehr stark!

Ein sehr guter Näherungswert ist also $x^*\approx 2{,}08$

d) Viel zu aufwendig zu rechnen!!