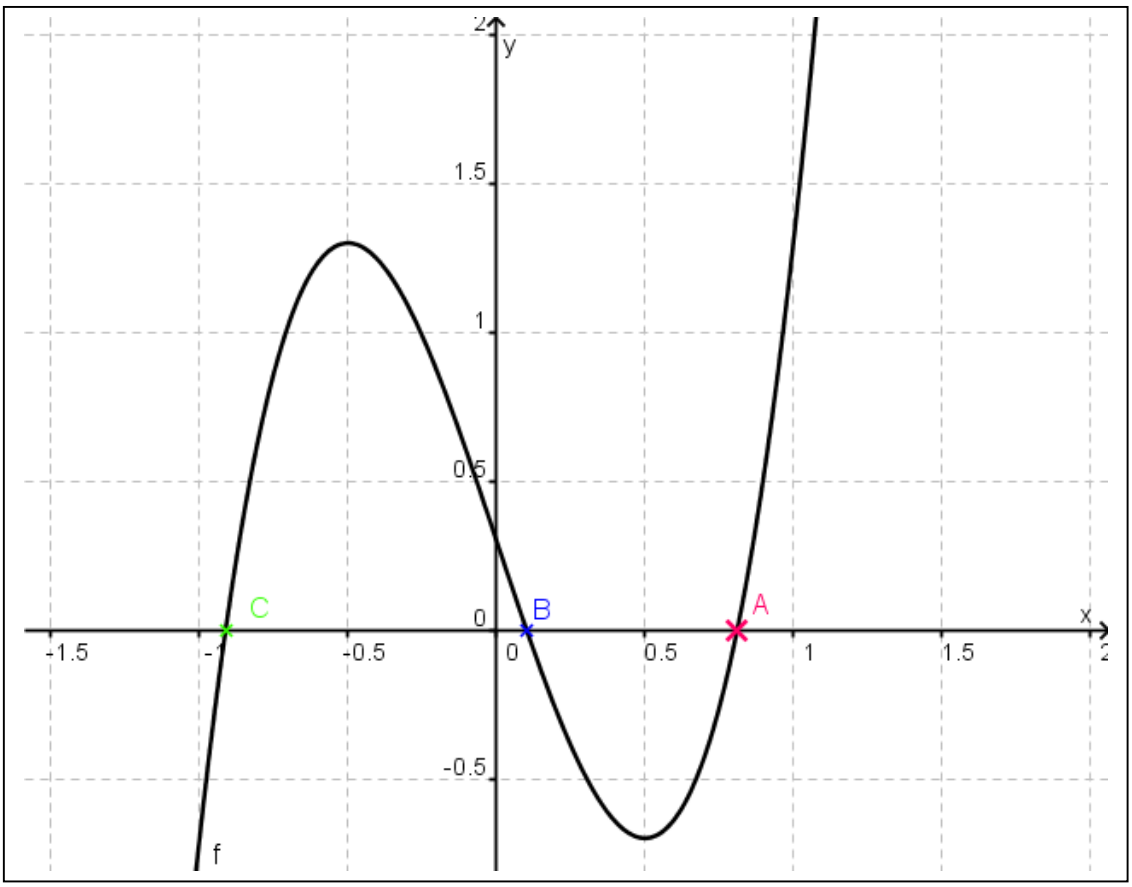
4. Newton-Verfahren zur numerischen Bestimmung von Lösungen der Gleichung f(x) = 0

Meist lassen sich Gleichungen der Form f(x) = 0 nicht algebraisch lösen. In der Schule scheitern wir schon oft an Polynomfunktionen 3. Grades.

Bsp.: $f(x) = 4x^3 - 3x + 0{,}3$



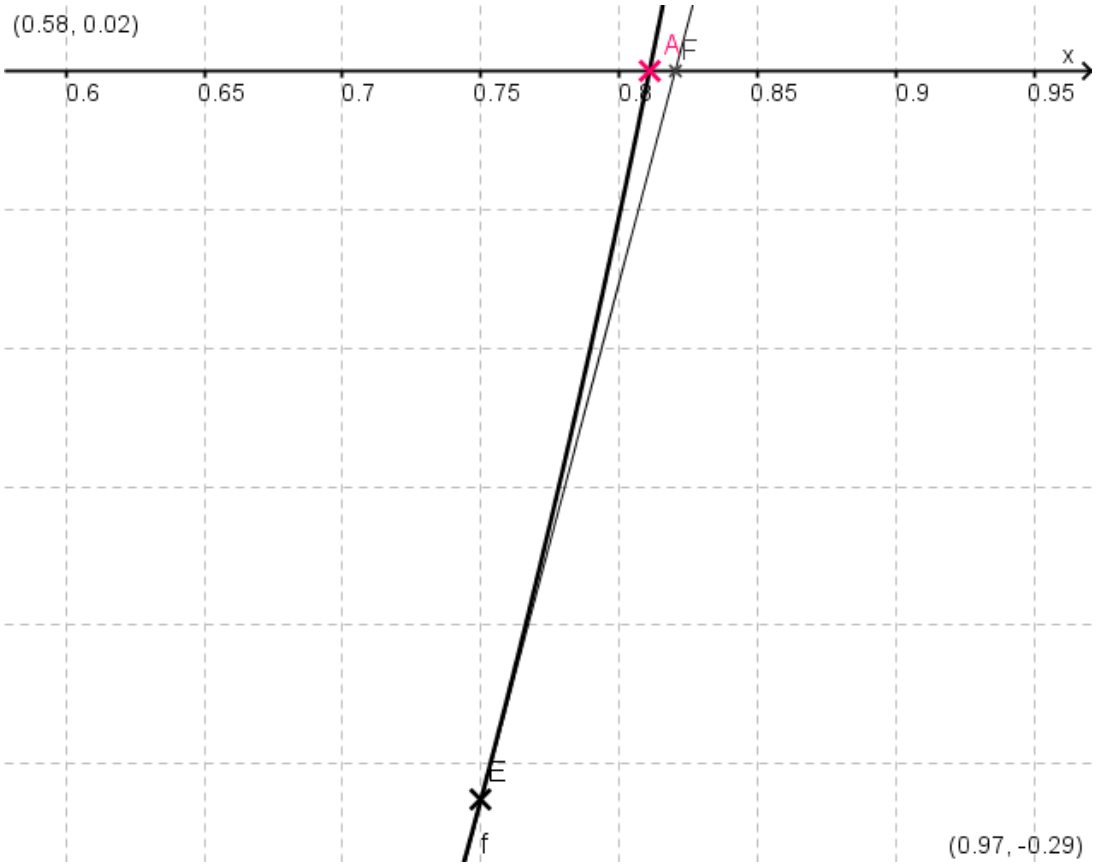
Aus dem Graphen können wir ablesen, dass G_f 3 Nullstellen hat.

Um die x-Koordinate des Punktes A nun numerisch ungefähr zu bestimmen, gehen wir folgendermaßen vor:

- Die Nullstelle bei A muss einen x-Wert haben, der folgende Bedingung erfüllt:
  $0{,}5 < x < 1$, da f in diesem Bereich keine Definitionslücke hat und einen VZW besitzt
  ($f(0{,}5) = -\ 0{,}7 < 0$ und $f(1) = 1{,}3 > 0$);

- Nun wählen wir den Mittelwert von 0,5 und 1 und erhalten 0,75

- Wir zeichnen die Tangente an G_f an der Stelle x = 0,75

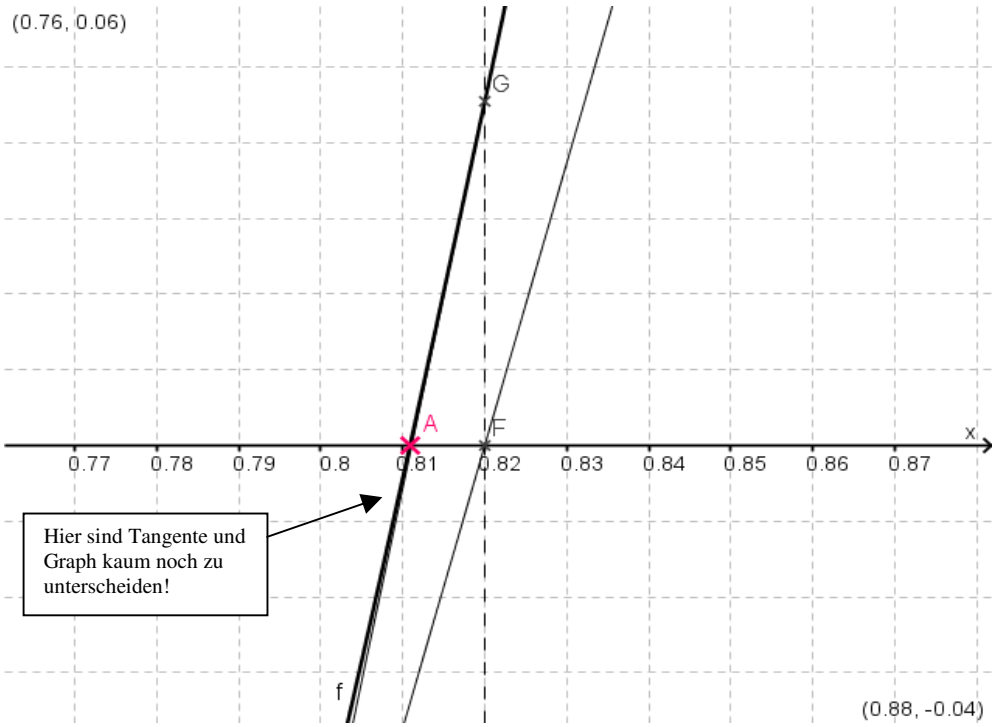


- Die Tangente schneidet die x-Achse im Punkt F mit der x-Koordinate 0,82

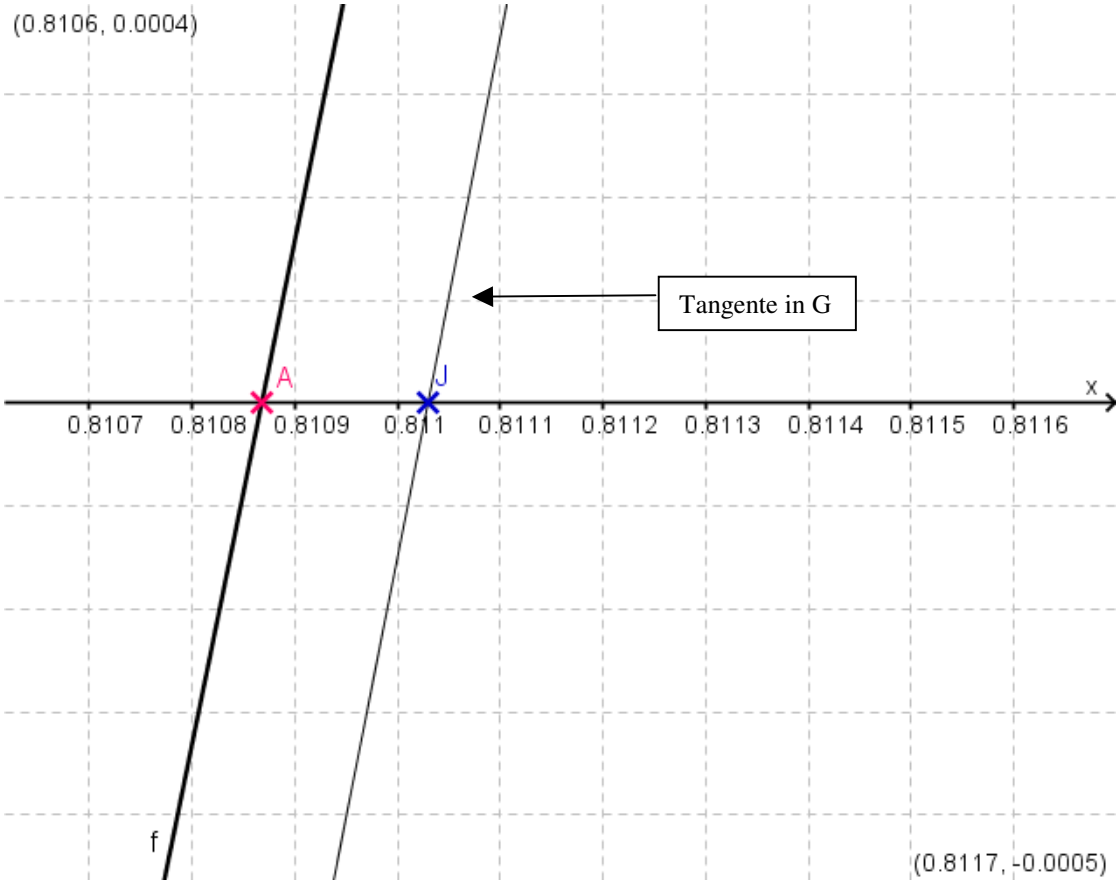
- Nun startet das Verfahren von Neuem:

- Wir wählen als Startwert den x-Wert des Schnittpunkte zwischen der Tangente und der x-Achse : x = 0,82

  Zeichne die Tangente an G_f an der Stelle x = 0,82 (also im Punkt G)



Das Ganze stark vergrößert:



Diese Tangente schneidet die x-Achse im Punkt J (x-Wert ≈ 0,81102).
Damit haben wir einen Näherungswert für diese Nullstelle bei A auf 3 Nachkommastellen genau.

Einschub:

Um eine Gerade aufzustellen, die z.B. durch den Punkt M(3/2) geht , benutzen wir die folgende Form der Geradengleichung : $y = g(x) = 2 + m(x - 3)$.
Diese Gerade geht sicherlich durch M, da $g(3) = 2 + m(3-3) = 2$
Die Steigung m der Tangente erhalten wir aus der 1. Ableitung von f an der gesuchten Stelle x_0.

Bemerkungen zur geeigneten Startstelle:

1. Um die Nullstelle bei C näherungsweise zu berechnen, könnten wir folgendermaßen argumentieren:

Vorgehen zur Bestimmung der Nullstelle C:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = -0{,}7 \\ f(0) = 0{,}3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Nullstelle im Intervall } [-1;0]$$

-Wähle Startwert: $x_0 = -0{,}5$; $y_0 = 1{,}3$; $f'(x) = 12x^2 - 3 \Rightarrow f'(-0{,}5) = 0$

Tangentengleichung: $y = 1{,}3$

Diese Tangente schneidet die x-Achse nie; Verfahren führt **nicht** zum Ziel;

<u>Tangentensteigung beim Newton-Verfahren darf nicht Null sein.</u>

2. Um die Nullstelle bei C näherungsweise zu berechnen, könnten wir auch folgendermaßen argumentieren:

Vorgehen zur Bestimmung der Nullstelle C:

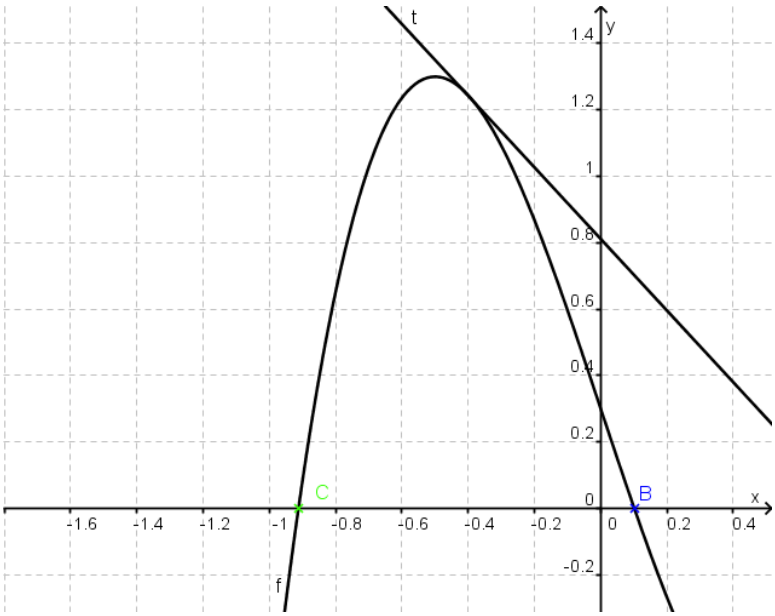
$f(-1) = -0{,}7$

$\Rightarrow$ Nullstelle im Intervall $[-1;0]$

$f(0) = 0{,}3$

-Wähle Startwert: $x_0 = -0{,}4$ (dieser Wert liegt auch in dem Intervall, in dem G_f eine Nullstelle hat) , $y_0 = 1{,}24$

$f'(x) = 12x^2 - 3 \Rightarrow f'(-0{,}4) = -1{,}08$

Dieses Verfahren führt hier auch nicht zu C, da $f(-1) = -0{,}7 < 0$ und $f(0) = 0{,}3 > 0$ und wir die Nullstelle suchen, in der G_f <u>steigt</u>.

<u>Tangentensteigung beim Newton-Verfahren muss geeignetes Vorzeichen besitzen.</u>