LS 11 S 110/20

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Dreiecke $ABC_k$ mit A(–1|1|3), B(3|3|–1) und $C_k$(1+k|2+2k|1+2k) für alle k gleichschenklig sind.

b) Für welche k-Werte ist das Dreieck gleichseitig?

c) Welche Koordinaten hat der Mittelpunkt der Seite [AB]?

d) Zeigen Sie: $\overrightarrow{MC_k} \perp \overrightarrow{AB}$ für alle k.

zu a)

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 3-1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

  $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2+2^2+4^2} = 6$

- $\overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 1+k-(-1) \\ 2+2k-1 \\ 1+2k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+k \\ 1+2k \\ -2+2k \end{pmatrix}$

  $\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = \sqrt{(2+k)^2+(1+2k)^2+(-2+2k)^2}$

  $= \sqrt{4+4k+k^2+1+4k+4k^2+4-8k+4k^2}$

  $= \sqrt{9k^2+9}$

- $\overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} 1+k-3 \\ 2+2k-3 \\ 1+2k-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+k \\ -1+2k \\ 2+2k \end{pmatrix}$

  $\left|\overrightarrow{BC_k}\right| = \sqrt{(-2+k)^2+(-1+2k)^2+(2+2k)^2}$

  $= \sqrt{4-4k+k^2+1-4k+4k^2+4+8k+4k^2}$

  $= \sqrt{9k^2+9}$

- somit gilt $\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = \left|\overrightarrow{BC_k}\right|$ □

zu b)

- $\left|\overrightarrow{BC_k}\right| \overset{!}{=} \left|\overrightarrow{AB}\right|$
- $\sqrt{9k^2+9} = 6 \rightarrow 9k^2+9=36 \rightarrow k^2+1=4 \rightarrow k^2=3 \rightarrow k_{1/2} = \pm\sqrt{3}$

zu c)

- $M\left(\frac{-1+3}{2} \,\middle|\, \frac{1+3}{2} \,\middle|\, \frac{3-1}{2}\right) = M(1|2|1)$

zu d)

- z.Z: $\overrightarrow{MC_k} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC_k} \circ \overrightarrow{AB} = 0$ (beide Vektoren sind $\neq \vec{o}$)
- $\overrightarrow{MC_k} = \begin{pmatrix} 1+k-1 \\ 2+2k-2 \\ 1+2k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ (siehe oben)
- $\overrightarrow{MC_k} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ =4k+4k–8k=0 □