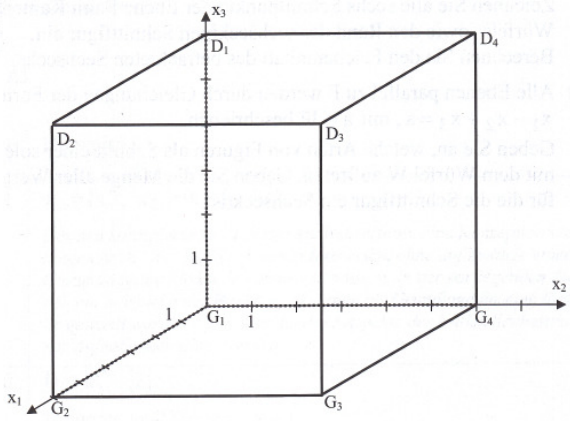
Übungsblatt: WH Geometrie

Aufgabe 1:

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Würfel W der Kantenlänge 6 gegeben. Die Eckpunkte $G_1(0|0|0)$ und $D_3(6|6|6)$ legen eine Raumdiagonale fest.

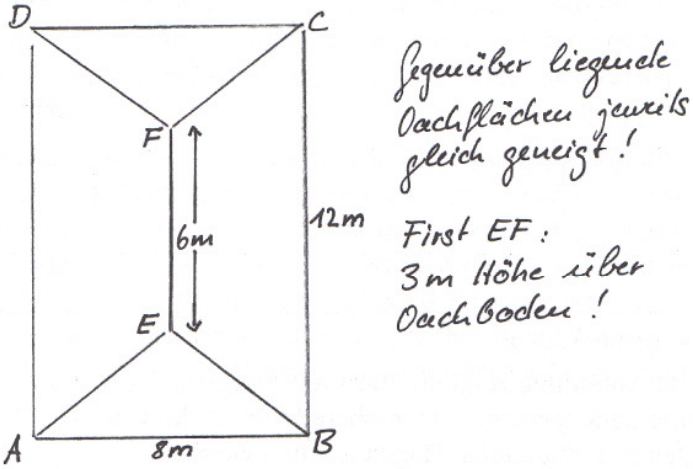


a) Der Würfel wird von einer Ebene geschnitten, die durch die Punkte D_1, G_2 und D_3 verläuft. Zeichnen Sie die Schnittfigur der Ebene mit dem Würfel ein.

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die die Ebene vom Würfel abschneidet. Wie viel Prozent des Würfelvolumens nimmt die Pyramide ein?

Aufgabe 2

Einem Zimmereibetrieb liegt für die Konstruktion eines Dachstuhls die nebenstehende Skizze samt handschriftlichem Kommentar der Bauherren vor. Für die Übernahme in ein Konstruktionsprogramm muss der Dachstuhl in einem dreidimensionalen Koordinatensystem beschrieben werden.



a) Legen Sie selbst nach dieser Vorgabe ein geeignetes Koordinatensystem fest und geben Sie die Koordinaten der beiden Dachfirst-Endpunkte E und F in diesem Koordinatensystem an.

b) Berechnen Sie alle Winkel im Dreieck AEB.

c) Das Dreieck AEB wird durch den Punkt G zu einem Parallelogramm ergänzt. Bestimmen Sie die Koordinaten von G.

Aufgabe 3:

M(–3/–4/2) ist der Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius 5.

a) Geben Sie die Kugelgleichung an.

b) Finden Sie mindestens drei Punkte auf der Kugeloberfläche, darunter einen Punkt P, der außerdem auf einer der Koordinatenachsen liegt.

Aufgabe 4

Von einem geraden Prisma ABCDEFGH sind 5 Eckpunkte gegeben: A(0/0/0), B(1/4/0), C(–1/10/0), D(–2/6/0) und E(0/0/5).

a) Zeichnen Sie das Prisma und ermitteln Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte.

b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist und berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Prismas.

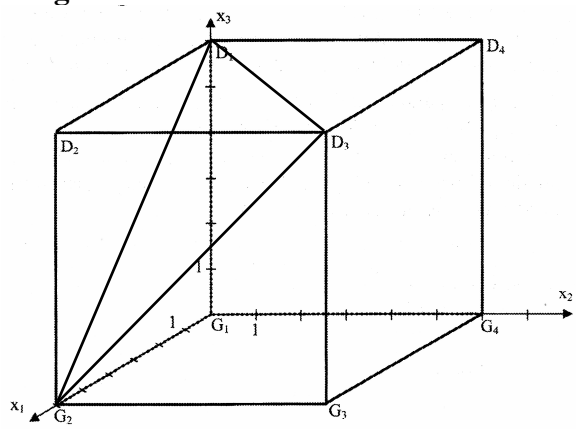
c) Lösen Sie die folgenden Gleichungen: $\vec{BD} + \vec{x} = \vec{BF}$; $\vec{AF} + \vec{FH} + \vec{HC} + \vec{x} = \vec{0}$;

$\vec{EG} + \vec{GC} = \vec{AC} - \vec{x}$

d) Eine Pyramide hat das Viereck EFGH als Grundfläche. Das Volumen beträgt 56 (VE). Ermitteln Sie die Pyramidenhöhe.

Lösungen zum Übungsblatt: WH Geometrie

Aufgabe 1:



a) siehe links

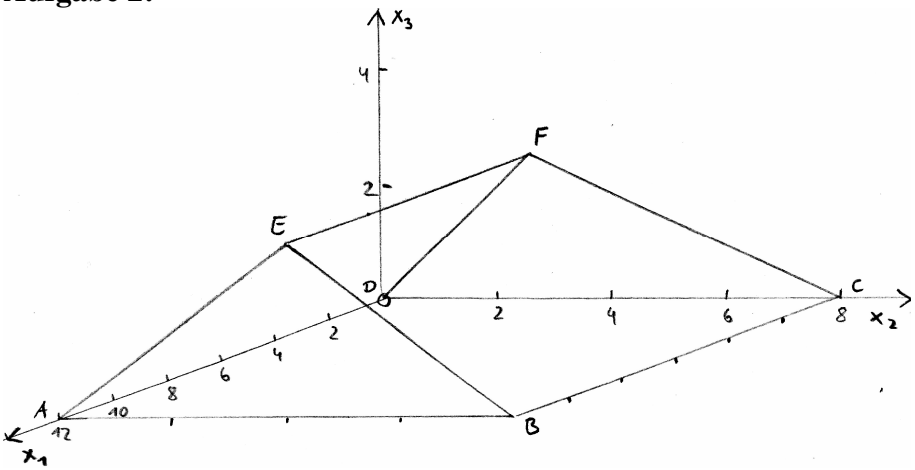
b) Die Grundfläche der Pyramide liegt auf der Oberseite des Würfels W und ist halb so groß wie dessen Seitenfläche. Die Höhe entspricht gerade der Kante D_2G_2. Damit ist das Volumen der Pyramide

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right) \cdot 6 = 36(VE)$$

Dies entspricht einem prozentualem Anteil von

$$\frac{V_{Pyramide}}{V_{Würfel}} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} = 16\tfrac{1}{6}\,\%$$

Aufgabe 2:



a) Mit dieser Festlegung haben die Punkte folgende Koordinaten:
E(9/4/3) und F(3/4/3)

b) Dreieck AEB ist gleichschenklig. Daher genügt die Berechnung eines Winkels, z. Bsp.

Winkel φ zwischen den Vektor $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 9-12 \\ 4-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12-12 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es gilt:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AE} \circ \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{32}{\sqrt{34} \cdot 8} \Rightarrow \varphi \approx 46{,}7° \text{ (= Winkel zwischen } \overrightarrow{BA} \text{ und } \overrightarrow{BE}\text{)}$$

und der fehlende zwischen $\overrightarrow{EA}$ und $\overrightarrow{EB}$ ist $180° - 2 \cdot 46{,}7° = 86{,}6°$)

c) Es muss $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EG}$ gelten. Der Punkt E wird also um den Vektor $\overrightarrow{AB}$ verschoben. Damit erhält man:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu Aufgabe 3:

a) Bedingung: $\left|\vec{MX}\right| = r \quad \Leftrightarrow$

$$\left|\vec{X} - \vec{M}\right| = r \quad \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\right| = r \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2} = r$$

$$\Rightarrow (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

$$hier: \left|\vec{X} - \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 5 \quad \text{bzw.} \quad (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 4)^2 + (x_3 - 2)^2 = 25$$

b) Idee : Wir gehen vom Mittelpunkt M 5 Einheiten in Richtung der Koordinatenachsen
$\Rightarrow P_1(-3 \mid -4 \mid 7)$, $P_2(-3 \mid -4 \mid -3)$, $P_3(2 \mid -4 \mid 2)$,,..
Ein Punkt P liegt auf den Koordinatenachsen, wenn mindestens 2 Koordinaten den Wert "0" haben.

1. Versuch: $P(p_1 \mid 0 \mid 0)$: $(p_1 + 3)^2 + (0 + 4)^2 + (0 - 2)^2 = 25$

$$(p_1 + 3)^2 + 16 + 4 = 25$$

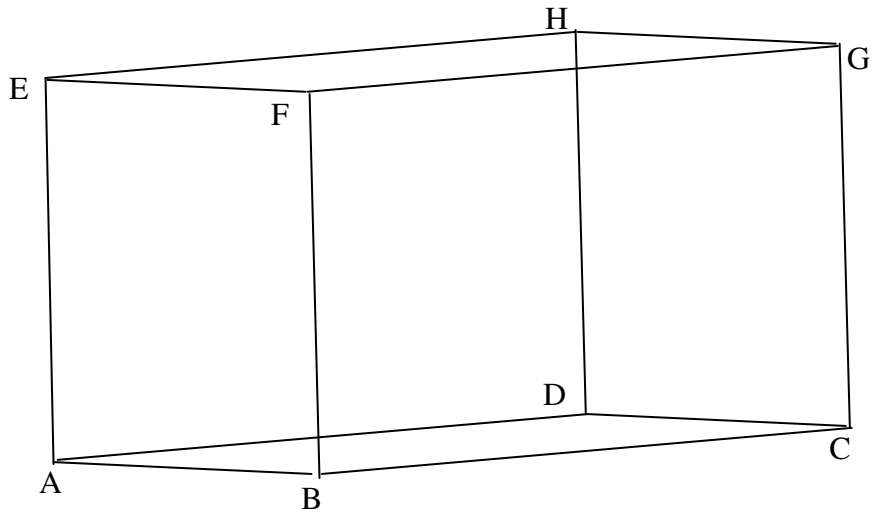
$$(p_1 + 3)^2 = 5 \quad \Rightarrow p_1 + 3 = \pm\sqrt{5} \quad \Rightarrow p_1 = -3 \pm \sqrt{5}$$

2. Versuch: $P(0 \mid 0 \mid p_3)$: $(0 + 3)^2 + (0 + 4)^2 + (p_3 - 2)^2 = 25$

$$9 + 16 + (p_3 - 2)^2 = 25$$

$$(p_3 - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow p_3 = 2 \quad \ldots\ldots.$$

Aufgabe 4:



a) Die fehlenden Punkte F, G und H liegen senkrecht über den Punkten B, C und D und haben damit die Koordinaten
F(1/4/5)
G(-1/10/5) und
H(-2/6/5)

b) Zu zeigen ist, dass $\vec{AB} = \vec{DC}$.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{DC} = \begin{pmatrix} -1-(-2) \\ 10-6 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oberfläche: 1) Seite ABCD: $\left|\vec{AB} \times \vec{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}\right| = 14$ (FE)

2) Seite ABFE: $\left|\vec{AB} \text{ x } \vec{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}20\\-5\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$ (FE)

3) Seite ADHE: $\left|\vec{AD} \text{ x } \vec{AE}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}30\\10\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$ (FE)

Gesamtoberfläche: $2 \cdot (14 + 5\sqrt{17} + 10\sqrt{10})$ (FE)

Volumen: $\left|\left(\vec{AB} \text{ x } \vec{AD}\right) \circ \vec{AE}\right| = \left|\left(\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right| = 70(\text{VE})$

c) $\vec{BD} + \vec{DF} = \vec{BF}$, $\vec{AF} + \vec{FH} + \vec{HC} + \vec{CA} = \vec{0}$, $\vec{EG} + \vec{GC} = \vec{AC} - \vec{AE}$

d) Die Fläche EFGH hat eine Größe von 14 FE. Das Volumen einer Pyramide berechnet sich zu $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} A_{\text{Pyramide}} h_{\text{Pyramide}}$. Somit erhält man die Gleichung $56 = \frac{1}{3} \cdot 14 \cdot h_{\text{Pyramide}}$ mit der Lösung $h_{\text{Pyramide}} = 12$.

zu Aufgabe 5

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\-4\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\-6\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8-12\\6-4\\6-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16+4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

Zu Aufgabe 6:

a) Z.z.: Die Winkel zwischen den drei Vektoren müssen jeweils 90° betragen.
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

Volumen 1: $|\vec{a}| = \sqrt{6}$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{3}$ $\quad |\vec{c}| = \sqrt{8}$ $\quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = 12$

Volumen 2: $V = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right]\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\-4\end{pmatrix}\right| = |-2-2-8| = 12$

b) $A_{\text{klein}} = \sqrt{18}$ $\quad A_{\text{groß}} = \sqrt{48}$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{A_{groß}}{A_{klein}} = 1{,}63 \quad \Rightarrow 63\%$

c) Die Länge der Raumdiagonalen des Quaders legt den Kugeldurchmesser fest.
Länge der Raumdiagonalen: $d = \sqrt{3+6+8} = \sqrt{17}$ $\quad \Rightarrow \quad$ Kugelradius: $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17}$