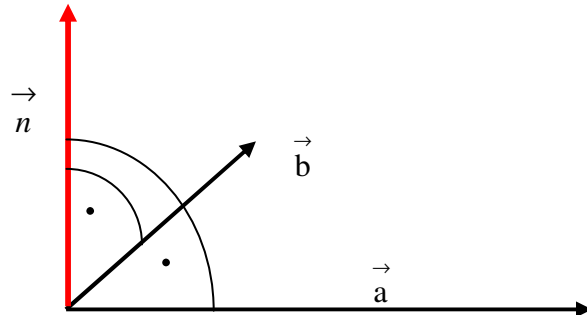


7. Vektorprodukt – Flächeninhalt (Parallelogramm, Dreieck), Rauminhalt (Spat, 3-seitige Pyramide)

Wir suchen im Folgenden ein Rechenverfahren, das zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Vektor $\vec{n}$ angibt, der sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ senkrecht ist.

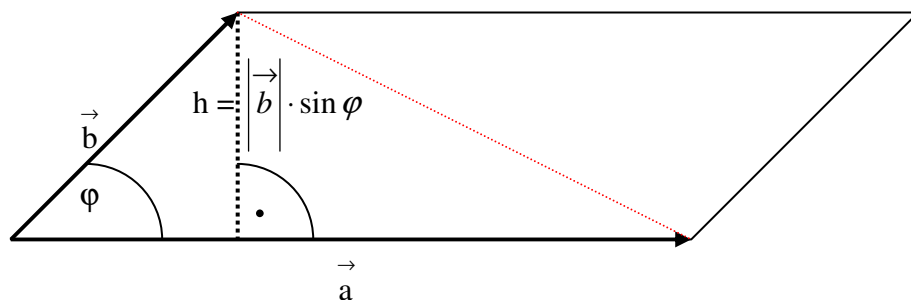


Definition: Unter dem Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verstehen wir:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Anwendungen des Vektorproduktes:

- Berechnung eines Vektors, der zu zwei gegebenen Vektoren senkrecht ist (s.o.)
- Berechnung des Flächeninhaltes eines Parallelogramms



Wir könnten zeigen, dass $\left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi$ (s. Buch S. 112 oben)

Wir wissen andererseits, dass für den Flächeninhalt des Parallelogramms gilt: $A_{Pa} = a \cdot h_a$

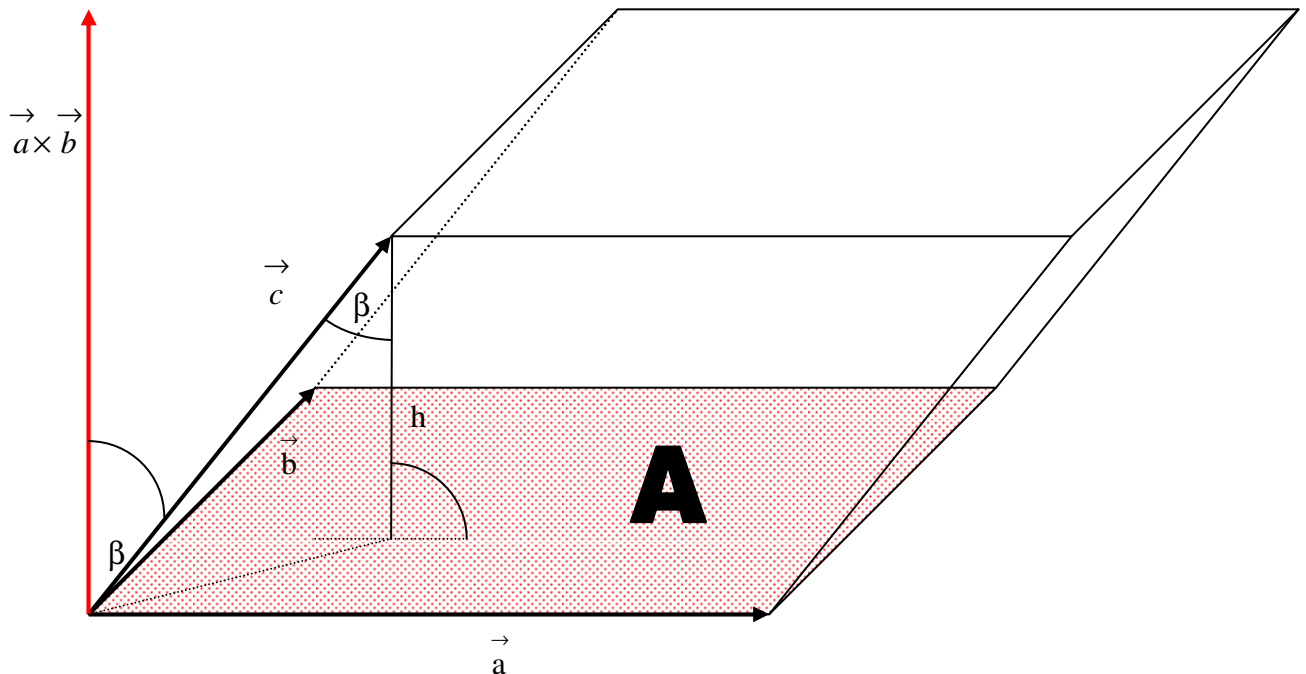
Mit $h_a = \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi$ (s. Zeichnung) erhalten wir: $A_{Pa} = a \cdot h_a = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \sin \varphi = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms gilt: $A_{Pa} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt folglich: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

c) Berechnung des Rauminhaltes eines Spats

Bem.: Ein Spat ist ein Körper, bei dem Grund- und Deckfläche kongruente Parallele-
gramme sind. Die Kanten müssen jedoch nicht senkrecht (orthogonal) zur
Grundfläche sein.



Für das Volumen des Spats gilt: $V = A \cdot h = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \cdot h = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \cdot \left| \vec{c} \right| \cdot \cos \beta = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right|$

Für den Rauminhalt eines Spats, das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, gilt:

$$V_{\text{Spat}} = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right|$$

Für den Rauminhalt einer dreiseitigen Pyramide, die von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, gilt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{6} \left| \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \cdot \vec{c} \right| \quad (\text{s. Zeichnung S. 112})$$

Übung: 113/2a, 6a, 12

10 3a

4a 5