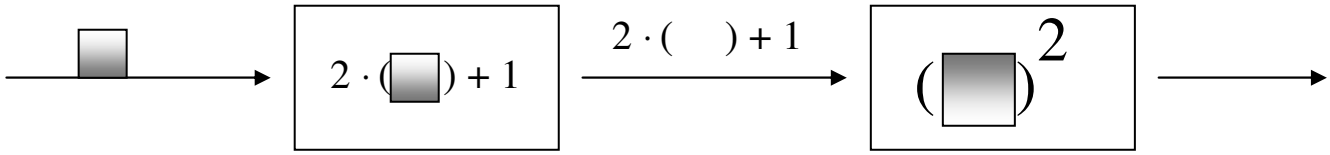
V 2 Die Kettenregel

Beispiel : Die 1. Maschine wird mit einer Zahl (oder einem Term) gefüllt, verarbeitet diese Zahl/Term, indem sie den Wert verdoppelt und 1 addiert; die 2. Maschine nimmt die Zahl/ den Term der 1. Maschine und quadriert diesen Wert /Term.



1. Maschine 2. Maschine

a) Wir werfen die Zahl 3 in die 1.Maschine, diese „spuckt“ $2 \cdot 3 + 1 = 7$ aus, die 2. Maschine quadriert die Zahl „7“ und liefert das Endergebnis 49.

b) Wir werfen den Term x in die 1.Maschine, diese „spuckt“ $2 \cdot x + 1$ aus, die 2. Maschine quadriert den Term $(2x + 1)$ und liefert den Term $(2x + 1)^2$.

c) Wir werfen den Term sin(x) in die 1. Maschine, diese „spuckt“ $2 \cdot \sin(x) + 1$ aus, die 2. Maschine quadriert den Term $(2\sin x + 1)$ und liefert den Term $(2\sin x + 1)^2$.

Definition: Die Hintereinanderausführung von Funktionen heißt auch Verkettung.
Die Funktion f: $x \mapsto u(v(x))$ ist eine Verkettung der Funktionen u(x) und v(x).
Sprich: „u von v(x)“

Zusammenhang von Verkettung und Ableitungsregel („Kettenregel“)

Wir wissen bereits: $f(x) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \Rightarrow f'(x) = 8x + 4$

Für verkettete Funktionen gilt:

$$\boxed{f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{Nachdifferenzieren}} \text{ (Kettenregel)}}$$

Im Beispiel: $f(x) = (2x+1)^2$ mit $u(x) = (\quad)^2$ und $v(x) = 2x + 1$
$u'(x) = 2(\quad)$; $v'(x) = 2$; $u'(v(x) = 2(2x+1)$
$\Rightarrow f'(x) = 2(2x+1) \cdot 2 = 8x + 4$

Weitere Beispiele:

a) **$f(x) = (2 \sin x + 1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(2 \sin x + 1) \cdot 2 \cos x$**

b) **$f(x) = 2(\sin x)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 2(\sin x) \cdot \cos x$**

Aufgaben: S.137 / 2 , 5 und 7