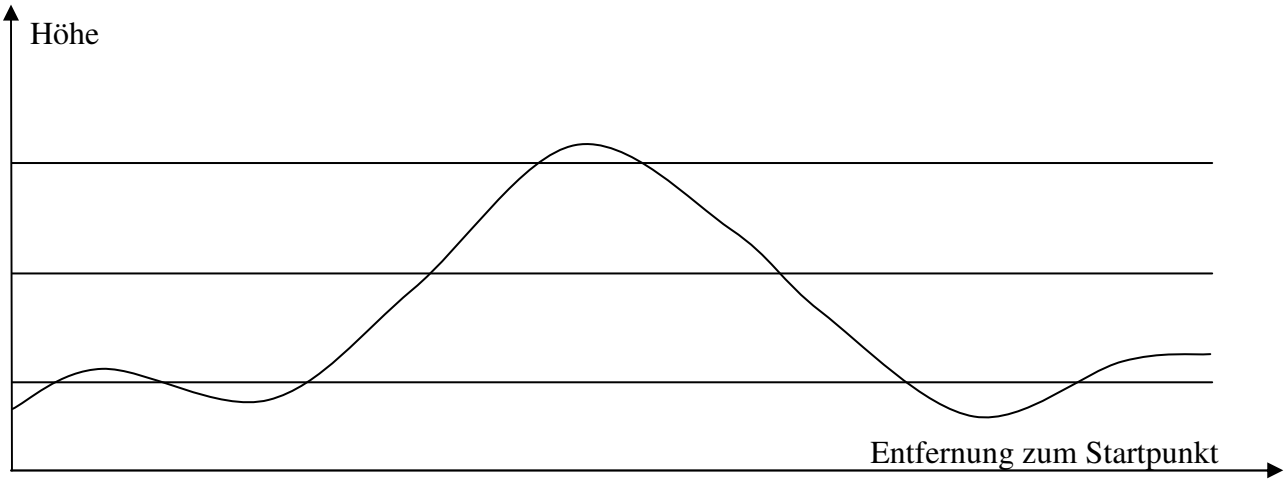
Die Umkehrfunktion

Eine Gruppe Radfahrer fährt bei einer Etappe der Tour de France dem folgenden Streckenprofil entlang. Man kann hierbei nach jeder Entfernung zum Startpunkt sagen, in welcher Höhe sich der Fahrer befindet.
Umgekehrt jedoch sagt die Höhe nichts über die Entfernung des Fahrers zum Startpunkt aus.

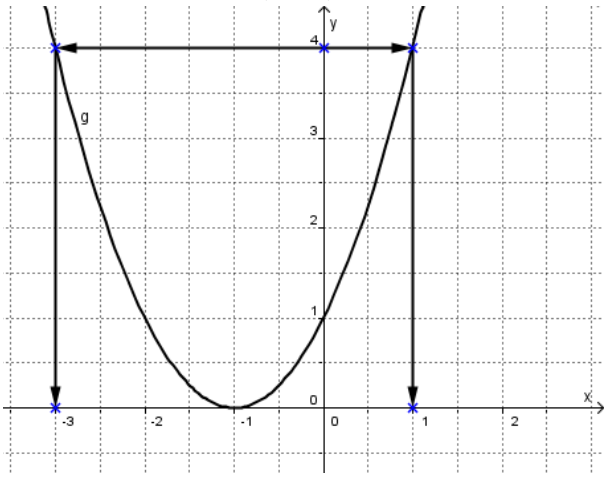


Die Funktion Entfernung $\mapsto$ Höhe ist damit eindeutig, die umgekehrte Funktion Höhe $\mapsto$ Entfernung hingegen nicht.

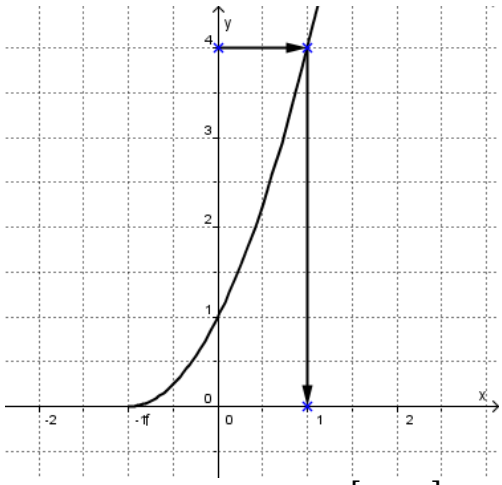
Definition:
Eine Funktion $f : x \mapsto f(x)$ mit der Definitionsmenge D_f und der Wertemenge W_f heißt **umkehrbar**, falls es zu jedem $y \in W_f$ **nur ein** $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ gibt.
Ist eine Funktion umkehrbar, so ist die umgekehrte Zuordnung ebenfalls eine Funktion, die man **Umkehrfunktion von f** nennt. Sie wird mit f^{-1} bezeichnet.

Durch das Einschränken des Definitionsbereichs auf ein Intervall kann die Umkehrbarkeit einer Funktion erreicht werden.

Bsp: $f : x \mapsto f(x) = (x+1)^2$



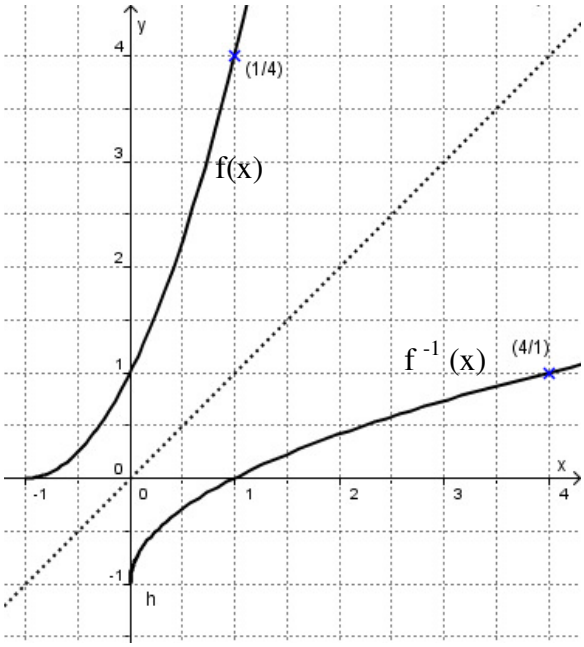
f nicht umkehrbar auf $D_f = IR$



f umkehrbar auf $D_f = [-1;\infty]$

Um den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} zu erhalten, ist der Graph der Funktion f an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten zu spiegeln. (siehe Bild)

Bsp: $f : x \mapsto f(x) = (x+1)^2$ mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $D_f = [-1;\infty]$



Bestimmung des Funktionsterms der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$:

1. Vertauschen der Variablen x und y.
   hier: $x = (y+1)^2$

2. Auflösen der Gleichung nach y
   hier:
   $x = (y+1)^2 \,|\sqrt{\ }$
   $\sqrt{x} = y+1 \,|-1$
   $y = \sqrt{x} - 1$
   $\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

Satz (Kriterium für Umkehrbarkeit)
Ist eine Funktion f streng monoton, so ist sie umkehrbar.
Insbesondere ist jede differenzierbare Funktion f, für die f'(x)>0 für alle x in einem Intervall (bzw. f'(x) < 0 für alle x in einem Intervall), in diesem Intervall umkehrbar.

Übungen: S. 132/2 3 a,b,e 6 b,d 8