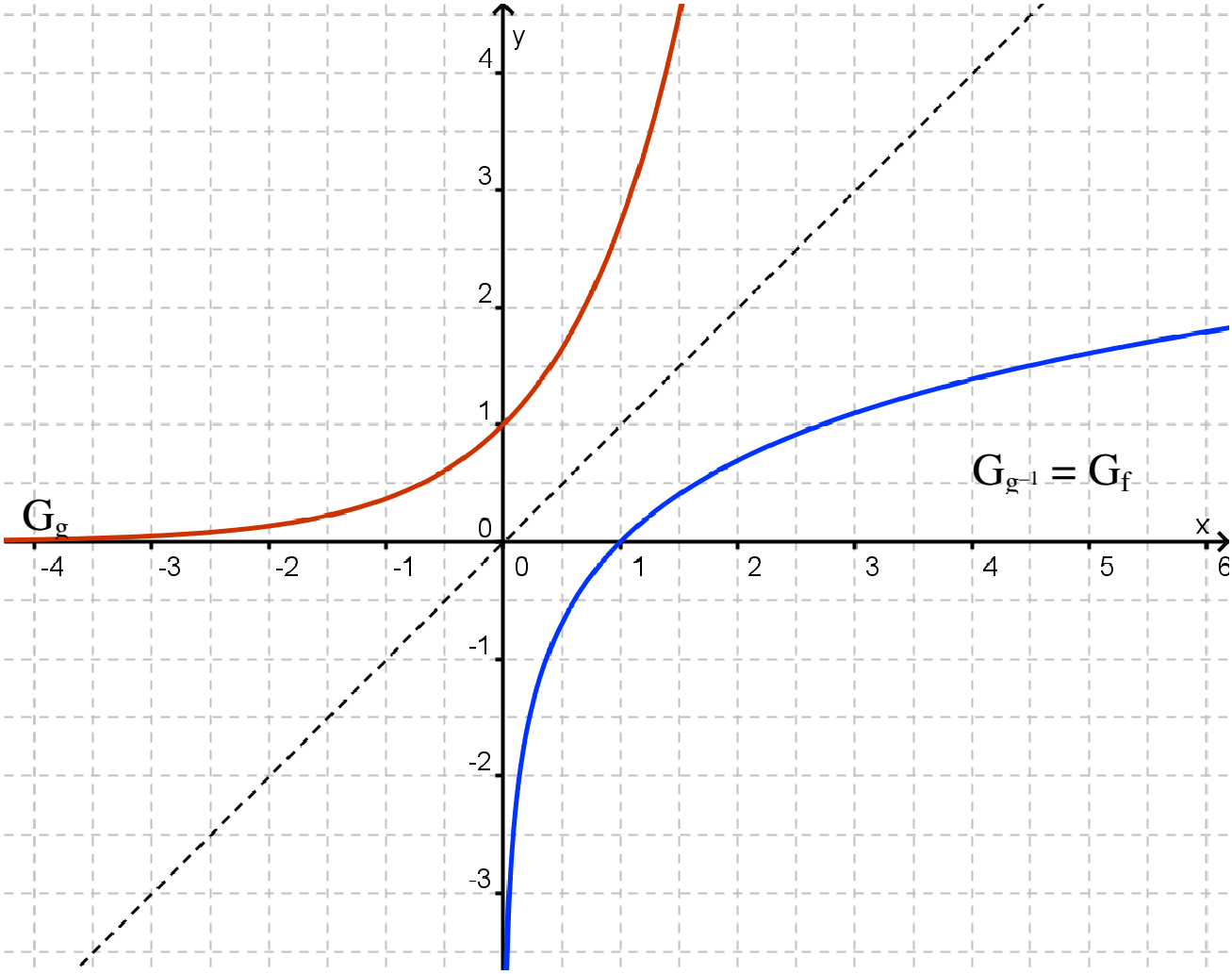
3. Die ln-Funktion und Ableitungsregeln

Wir betrachten den Graph der Exponentialfunktion zur Basis e: $g(x) = e^x$



Da die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, ist sie umkehrbar.
Geometrisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten: $y = x$

Definition: Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis e heißt **natürliche Logarithmusfunktion**.
Es gilt: $g(x) = e^x \quad \Rightarrow g^{-1}(x) = f(x) = \ln x$

Es gilt:

- $D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f = \mathbb{R}$
- $\ln 1 = 0$, da $e^0 = 1$
- $\ln e = 1$, da $e^1 = e$
- $\ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$
- die ln-Funktion hat eine Nullstelle für $x = 1$ und ist streng monoton steigend
- die ln-Funktion hat die y-Achse als Asymptote; es gilt: $\lim\limits_{x \to 0+0} \ln(x) = -\infty$

Die Lösung x der Gleichung : $e^x = y$ ist demnach: $x = \ln y$

d.h. $e^{\ln x} = x$ oder auch $\ln e^x = x$

"Funktion und Umkehrfunktion heben sich gegenseitig auf"

Beispiele:

- $e^x = 5 \overset{\text{logarithmieren}}{\Leftrightarrow} \ln e^x = \ln 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$

- $e^{2x+1} = 1{,}5 \overset{\text{logarithmieren}}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \ln e^{2x+1} = \ln 1{,}5 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln(1{,}5)$
  $\Leftrightarrow 2x = \ln(1{,}5) - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(1{,}5) - 1}{2}$

- $\ln 2x = 3 \overset{\text{auf beiden Seiten e-Funktion anwenden}}{\Leftrightarrow} e^{\ln 2x} = e^3$
  $\Leftrightarrow 2x = e^3 \Leftrightarrow x = 0{,}5\, e^3$

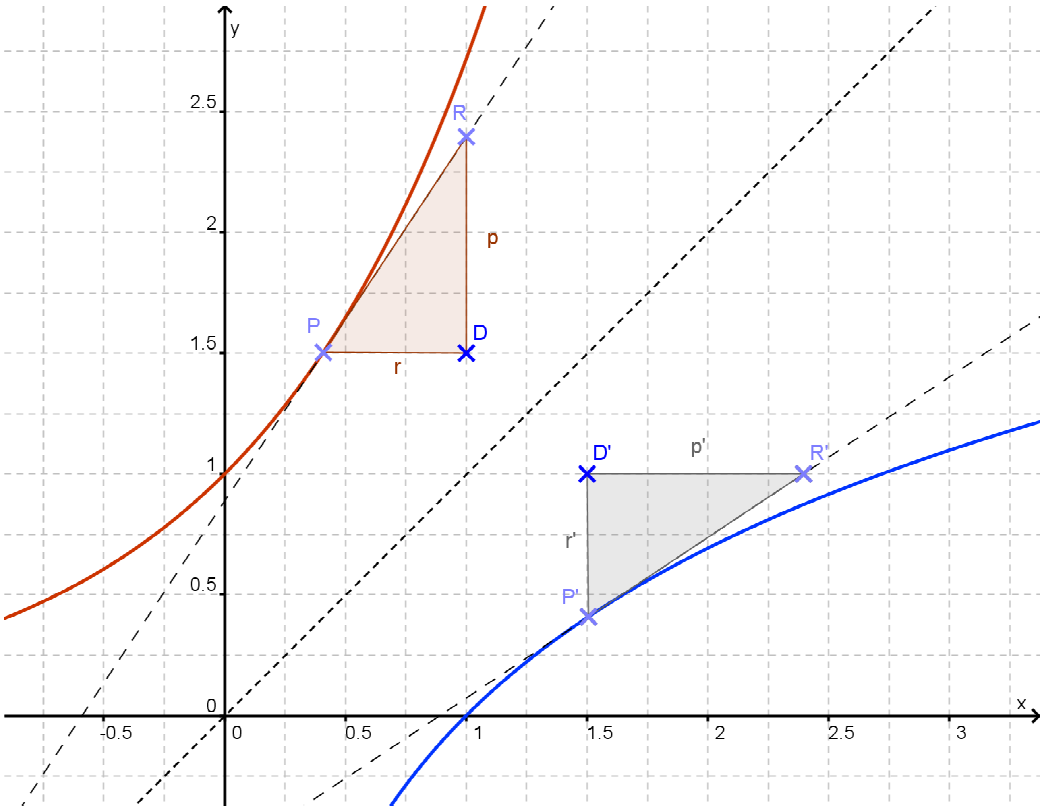
<u>Rechenregeln für den Logarithmus (s. Merkhilfe bzw. Formelsammlung):</u>

$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$ $\qquad$ $\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$

$\ln u^z = z \ln u$

<u>Herleitung der Ableitungsregel für die ln-Funktion</u>

Wir betrachten wiederum den Graph der e-Funktion und eine Tangente an einen beliebigen Punkt P des Graphen; anschließend zeichnen wir ein Steigungsdreieck ein.



Es gilt:

- $P(x_p \mid y_p) \in$ Graphen der Exponentialfunktion; d.h. $y_p = e^{x_p}$ $\Rightarrow$

  Steigung m der Tangente an der Stelle x_p des Graphen der e-Funktion :

  $$m_{xp} = \frac{p}{r} = g'(x_p) = e^{x_p} = y_p$$

- $P'(y_p \mid x_p) \in$ Graphen der Logarithmusfunktion $\Rightarrow$

  Steigung m der Tangente an der Stelle y_p des Graphen der ln-Funktion :

  $$f'(y_p) = m_{yp} = \frac{r}{p} = \frac{1}{g'(x_p)} = \frac{1}{e^{x_p}} = \frac{1}{y_p}$$

- Ersetze die Variable y_p durch x und wir erhalten für f (x) = ln (x):

Ableitung der ln-Funktion: $\boxed{f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$

Folgerung: $\boxed{\text{Eine Stammfunktion zu } f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ lautet: } F(x) = \ln|x|}$

Ableitung der Funktion k(x) = ln (h(x)) : $\boxed{k(x) = \ln(h(x)) \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{h(x)} \cdot h'(x)}$

Aufgaben: S. 157/ 4 / 5 / 7 / 8/ 9 / 10
S. 158/ 12 / 13/ 14/ 16/ 17
S. 160/ 2 / 4b,d,e,g / 5 / 8 / 9c / 10 /11
S. 162/ 3 / 5 / 6/ 7 / 9a,b