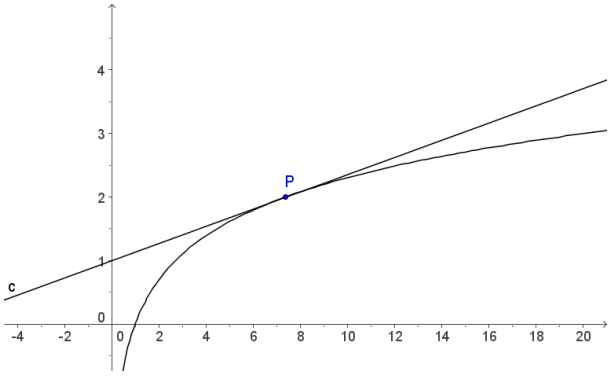
Klasse	Art	Schwierigkeit	Thema	S. 157
11	**Üben**	**XX**	**Differenzenquotient**	**9**

a) $P(e^2 \mid 2)$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

Skizze:



Ansatz: $y = mx + t$

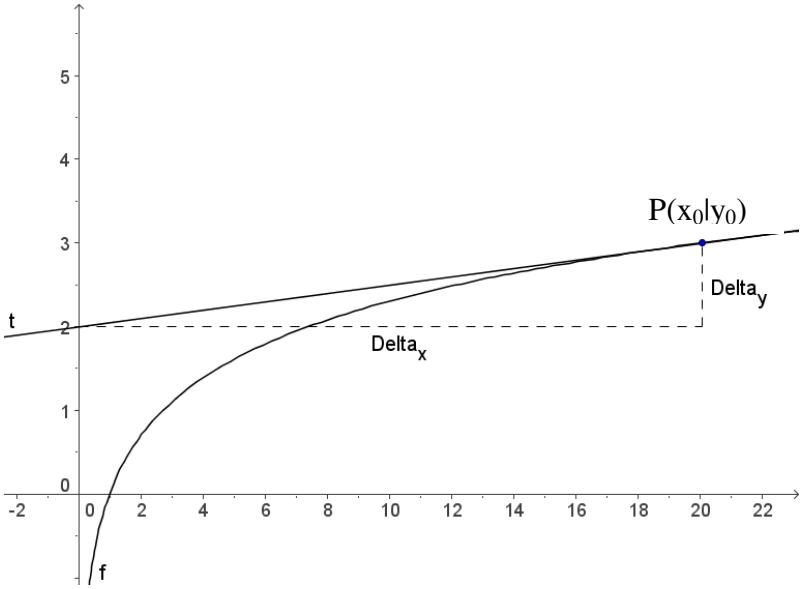
Steigung: $m = f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$

Punkt in Ansatz einsetzen: $2 = \frac{1}{e^2} \cdot e^2 + t$

$2 = 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{e^2} \cdot x + 1}}$

b) A(0/2)

Skizze:



<u>1. Lösungsmöglichkeit</u>:

Der Berührpunkt $P(x_0 \mid y_0)$ ist nicht bekannt.

Tangentensteigung an der Stelle x_0 mit Hilfe der Ableitung

$f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

Tangentensteigung mit Hilfe des Steigungsdreiecks:

$$m = \frac{\text{Delta}_y}{\text{Delta}_x} = \frac{y_0 - 2}{x_0} = \frac{\ln(x_0) - 2}{x_0}$$

Gleichsetzen: $f'(x_0) = m$

$$\frac{1}{x_0} = \frac{\ln(x_0) - 2}{x_0} \quad \Rightarrow \quad 1 = \ln(x_0) - 2 \quad \Rightarrow \quad 3 = \ln(x_0) \quad \Rightarrow \quad e^3 = x_0$$

Nun wissen wir, dass der Berührpunkt bei der Stelle $x_0 = e^3$ liegt.

Ansatz für die Tangente: $y = mx + t$

Steigung: $m = f'(e^3) = \frac{1}{e^3}$

Fehlende y-Koordinate: $y = f(e^3) = \ln(e^3) = 3$

Punkt in Ansatz einsetzen: $3 = \frac{1}{e^3} \cdot e^3 + t$

$3 = 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{e^3} \cdot x + 2}}$

<u>2. Lösungsmöglichkeit:</u>

Der Berührpunkt $P(x_0 \mid y_0)$ ist nicht bekannt.

Mit Hilfe der allgemeinen Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

$f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

Die Tangente geht durch den Punkt A(0|2)

Einsetzen in die Tangentengleichung: $2 = \frac{1}{x_0} \cdot (0 - x_0) + y_0$

$2 = \frac{1}{x_0} \cdot (-x_0) + \ln(x_0)$

$2 = -1 + \ln(x_0)$

$3 = \ln(x_0) \quad \Rightarrow \quad x_0 = e^3$

Einsetzen in die allgemeinen Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

$y = \frac{1}{x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

$y = \frac{1}{e^3} \cdot (x - e^3) + \ln(e^3)$

$y = \frac{1}{e^3} \cdot x - 1 + 3$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{e^3} \cdot x + 2}}$

c) Der Berührpunkt $P(x_0 \mid y_0)$ ist nicht bekannt.

Mit Hilfe der allgemeinen Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

$f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$

Die Tangente geht durch den Punkt $A(0|n)$

Einsetzen in die Tangentengleichung:

$$n = \frac{1}{x_0} \cdot (0 - x_0) + y_0$$

$$n = \frac{1}{x_0} \cdot (-x_0) + \ln(x_0)$$

$$n = -1 + \ln(x_0)$$

$$n+1 = \ln(x_0) \quad \Rightarrow \quad x_0 = e^{n+1}$$

Einsetzen in die allgemeinen Tangentengleichung: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

$$y = \frac{1}{x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{1}{e^{n+1}} \cdot (x - e^{n+1}) + \ln(e^{n+1})$$

$$y = \frac{1}{e^{n+1}} \cdot x - 1 + n+1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{e^{n+1}} \cdot x + n}}$$