Hausaufgabe vom 22.04.2010

1. Das Fassungsvermögen eines Tanks beträgt 1200 Liter. Die Flüssigkeitsmenge im Tank zum Zeitpunkt t wird durch die Funktion f mit $f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t}$ [t in Minuten, f(t) in Litern] beschrieben.
   a) Wie viele Liter Flüssigkeit sind nach einer halben Stunde im Tank?
   b) Zu welchem Zeitpunkt ist der Behälter zur Hälfte gefüllt, wann schon 80% der Maximalfüllung im Tank?
   c) Zeigen Sie, dass die Flüssigkeitsmenge im Behälter stets zunimmt, und bestimmen Sie die mittlere **Änderungsrate der (!)** Flüssigkeitsmenge während der ersten Stunde.
   d) Aus Sicherheitsgründen darf die Flüssigkeitsmenge höchstens 85% des maximalen Fassungsvermögens betragen. Wird diese Vorschrift zu jeder Zeit eingehalten? Begründung!

2. Folgende Tabelle gibt für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1991 bis 1999 die Anzahl der Mobilfunkverträge in Deutschland jeweils zum Jahresende an.

Jahr	1991	1993	1995	1997	1999
Anzahl in Mio.	0,5	1,8	3,8	8,3	23,4

   Die steigende Anzahl der Mobilfunkverträge lässt sich in diesem Zeitraum näherungsweise als exponentielles Wachstum auffassen und durch eine Exponentialfunktion der Form $N(x) = a \cdot e^{bx}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ beschreiben. N(x) ist dabei die Zahl der Mobilfunkverträge in Millionen, x ist die seit Jahresende 1991 vergangene Zeit in Jahren. Beispielsweise ist $x = 8$ für das Ende des Jahres 1999.

   a) Bestimmen Sie a und b aus den Werten für die Jahre 1991 und 1999. Runden Sie b auf zwei Dezimalen.

   [Ergebnis: $a = 0{,}5$; $b = 0{,}48$]

   b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Funktionswertes N(x) für das Jahresende 1995 vom tatsächlichen Wert.
   Welcher Funktionswert ergibt sich für das Jahresende 2007? Bewerten Sie das Ergebnis im oben genannten Anwendungszusammenhang.

   c) Bei einem exponentiellen Wachstum dauert es immer gleich lang, bis sich die Funktionswerte verdoppeln.
   Berechnen Sie diese Verdopplungszeit im vorliegenden Fall.

1. $f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t}$

a) $f(30) \approx 407$ (Liter)

b) $f(t) = 600$

$$1000 - 800 \cdot e^{-0{,}01t} = 600$$

$$e^{-0{,}01t} = \frac{600-1000}{-800} = +\frac{1}{2}$$

$$-0{,}01t = \ln\left(+\frac{1}{2}\right)$$

$$t = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}01} = 69{,}31....$$

$$t \approx 69 \text{ (Minuten)}$$

$$f(t) = 0{,}8 \cdot 1200 = 960$$

$$\vdots$$

$$t = \frac{\ln\frac{1}{20}}{-0{,}01} \approx 300$$

c) $f'(t) = -800 \cdot e^{-0{,}01t} \cdot (-0{,}01t)$

$$= 8 \cdot e^{-0{,}01t} > 0 \quad !$$

$\Rightarrow$ f steigt monoton $\Rightarrow$ Beh.

$f(0) = 200$

$f(60) \approx 561$ $\Rightarrow m_s = \frac{561-200}{60-0} = 6{,}02$

d) $0{,}85 \cdot 1200 = 1020$

$f(t) = 1000 - \underbrace{800 \cdot e^{-0{,}01t}}_{>0} < 1000$ immer $\Rightarrow$ Ja!

oder mit Grenzwert:

$$\lim_{t\to\infty} 1000 - 800\underbrace{e^{-0{,}01t}}_{\to 0} = „1000 - 0" = 1000$$

$\Rightarrow y = 1000$ ist waagrechte Asymptote, der sich der Graph von unten nähert (siehe c)) $\Rightarrow$ Beh.

2. $N(x) = a \cdot e^{bx}$

a) Aus Tabelle: $N(0) = 0{,}5 \Rightarrow a \cdot e^0 = 0{,}5 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0{,}5}}$

$$N(8) = 8{,}3$$

$$a \cdot e^{b \cdot 8} = 23{,}4$$

$$0{,}5 \cdot e^{8b} = 23{,}4$$

$$e^{8b} = 46{,}8$$

$$b = \frac{\ln 46{,}8}{8} \approx \underline{\underline{0{,}48}}$$

b) $N(4) = 0{,}5 \cdot e^{0{,}48 \cdot 4} \approx 3{,}4$

Abweichung vom Tabellenwert: $3{,}8 - 3{,}4 = 0{,}4$

Prozentuale Abweichung: $0{,}4$ von $3{,}8 = \frac{0{,}4}{3{,}8} = 0{,}1052\ldots$

$\approx \underline{\underline{10{,}5\,\%}}$

$N(2007) \approx 1082$ (Millionen) > 1 Milliarde

$\rightarrow$ $N(x)$ reicht nicht so weit in die Zukunft.

c) $N(0) = 0{,}5$

$$N(t) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$$

$$0{,}5 \cdot e^{0{,}48 \cdot t} = 1$$

$$e^{0{,}48 \cdot t} = 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{0{,}48} \approx \underline{\underline{1{,}4}} \text{ (Jahre)}$$