Zwei ln-Scharen

1. Gegeben ist die Funktionsschar $f_k(x)=\ln(k\cdot x)$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, die zugehörigen Graphen heißen G_k

a) Bestimmen Sie die maximal mögliche Definitionsmenge der Scharfunktionen, ihre Nullstellen sowie das Verhalten an den Grenzen des jeweiligen Definitionsbereichs in Abhängigkeit von k!

b) Für welches k verläuft der zugehörige Graph G_k durch den Punkt (1 / 2), für welches k durch (-e / -2)?

Von nun an gelte k>0 !!

c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Scharkurven. Welche Folgerung lassen die Ableitungen $f_k'(x)$ für die gegenseitige Lage der Graphen G_k zu? Bestätigen Sie dieses Ergebnis durch Umformung des Funktionsterms!

d) Bestimmen Sie allgemein (das heißt in Abhängigkeit von k) die Gleichungen der Tangenten an die Graphen G_k im Punkt (e / $f_k(e)$)

e) Zeichnen Sie die Graphen G_1, G_{-1} und G_5 in ein Koordinatensystem!

2. Betrachtet werden die Funktionen $f_a(x)=(x-a)\cdot\ln(x-a)$, $a>0$

a) Zeigen Sie, dass für die maximal mögliche Definitionsmenge gilt: $D=]a;\infty[$!

b) Untersuchen Sie die Funktionen auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

c) Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs!

d) Jeder Graph G_a besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erforderlich!). Bestimmen Sie seine Koordinaten! (Kontrollergebnis: $x_{TP}=\frac{1}{e}+a$)

e) Zeichnen Sie G_1

Zwei ln-Scharen

1. Gegeben ist die Funktionsschar $f_k(x)=\ln(k\cdot x)$, $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, die zugehörigen Graphen heißen G_k

a) Bestimmen Sie die maximal mögliche Definitionsmenge der Scharfunktionen, ihre Nullstellen sowie das Verhalten an den Grenzen des jeweiligen Definitionsbereichs in Abhängigkeit von k!

b) Für welches k verläuft der zugehörige Graph G_k durch den Punkt (1 / 2), für welches k durch (-e / -2)?

Von nun an gelte k>0 !!

c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Scharkurven. Welche Folgerung lassen die Ableitungen $f_k'(x)$ für die gegenseitige Lage der Graphen G_k zu? Bestätigen Sie dieses Ergebnis durch Umformung des Funktionsterms!

d) Bestimmen Sie allgemein (das heißt in Abhängigkeit von k) die Gleichungen der Tangenten an die Graphen G_k im Punkt (e / $f_k(e)$)

e) Zeichnen Sie die Graphen G_1, G_{-1} und G_5 in ein Koordinatensystem!

2. Betrachtet werden die Funktionen $f_a(x)=(x-a)\cdot\ln(x-a)$, $a>0$

a) Zeigen Sie, dass für die maximal mögliche Definitionsmenge gilt: $D=]a;\infty[$!

b) Untersuchen Sie die Funktionen auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen!

c) Untersuchen Sie das Verhalten der Scharfunktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs!

d) Jeder Graph G_a besitzt genau einen Tiefpunkt (Nachweis nicht erforderlich!). Bestimmen Sie seine Koordinaten! (Kontrollergebnis: $x_{TP}=\frac{1}{e}+a$)

e) Zeichnen Sie G_2

1.

$f_k(x) = \ln(k \cdot x) \; ; \; k \neq 0$

a) • $\mathbb{D}$

Es muss gelten $k \cdot x > 0$

1. Fall : $k < 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$

2. Fall : $k > 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

• NST $\quad k \cdot x \overset{!}{=} 1$

$x = \frac{1}{k}$

• $k > 0$: $\lim\limits_{x \to \infty} f_k(x) = „\ln(+\infty)" = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0+} f_k(x) = „\ln(0+)" = -\infty$

$k < 0$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = „\ln(k \cdot -\infty)" = \ln „+\infty" = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0-} f_k(x) = „\ln(0+)" = -\infty$

b) $(1|2)$: $\quad \ln k \cdot 1 = 2$

$k = e^2$

$\Rightarrow f_{e^2}(x) = \ln(e^2 \cdot x)$ verläuft durch $(1|2)$

$(-e|-2)$: $\quad \ln(k \cdot (-e)) = -2$

$-e \cdot k = e^{-2}$

$k = \frac{e^{-2}}{-e} = \underline{\underline{-e^{-3}}}$

c) $f_k'(x) = \frac{1}{kx} \cdot k = \frac{1}{x} > 0$, da $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow f_k(x)$ sms auf $\mathbb{D}$

$f_k'(x)$ ist unabhängig von k, d.h. für alle $f_k(x)$ gleich

$\Rightarrow$ alle G_k sind lediglich in Y-Richtung zueinander verschoben!

$$\ln(k \cdot x) = \underbrace{\ln k}_{\text{Zahl!}} + \ln x$$

d) Punkt: $(e \mid \ln k + 1)$

VR: $f_k(e) = \ln(e \cdot k) = \ln(e) + \ln k$
$= 1 + \ln k$

$f_k'(e) = \frac{1}{e}$

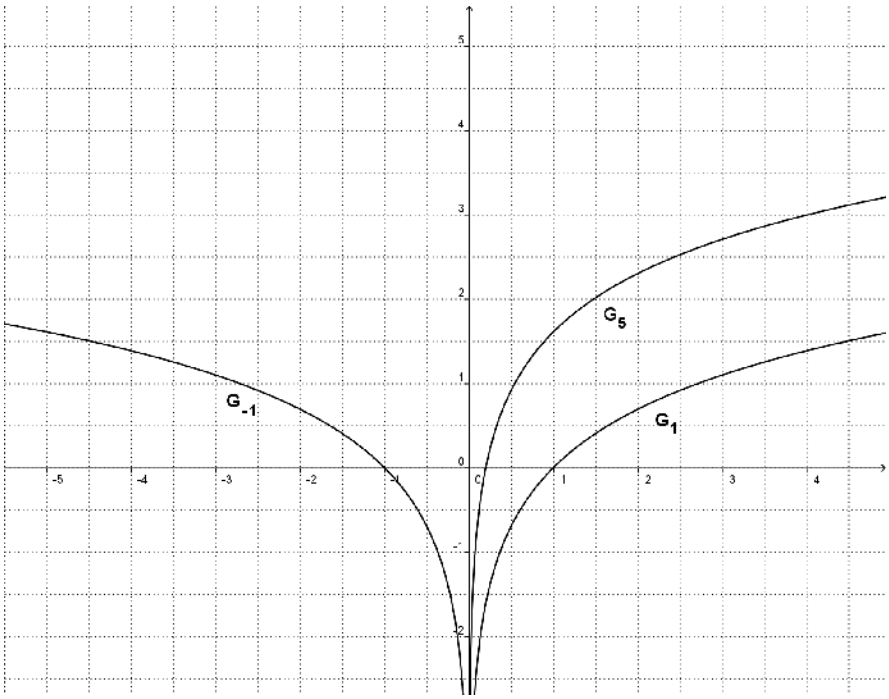
$\Rightarrow$ Tangente $y = \frac{1}{e} \cdot x + t$

$(e \mid 1 + \ln k)$: $1 + \ln k = \frac{1}{e} \cdot e + t$

$1 + \ln k = 1 + t$

$\ln k = t$

$\Rightarrow$ Tangente $y = \frac{1}{e} \cdot x + \ln k$



2.

$f_a(x) = (x-a) \cdot \ln(x-a) \quad , \; a>0$

a) Muss gelten $\quad x-a>0$

$x>a \quad \Rightarrow$ Def.

b) S_y : $x=0 \in \mathbb{D} \quad \Rightarrow$ kein S_y

NST : $\quad (x-a) \cdot \ln(x-a) = 0$

$(x=a) \in \mathbb{D} \qquad x-a=1$

$\underline{\underline{x=a+1}}$

c) $\lim\limits_{x \to a+0} \underbrace{(x-a)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln(x-a)}_{\to -\infty} = 0 \quad$ (ln rulert)

$\lim\limits_{x \to \infty} (x-a) \cdot \ln(x-a) = „+\infty \cdot +\infty" = +\infty$

c) $f_a'(x) = 1 \cdot \ln(x-a) + (x-a) \cdot \frac{1}{x-a} \cdot 1$

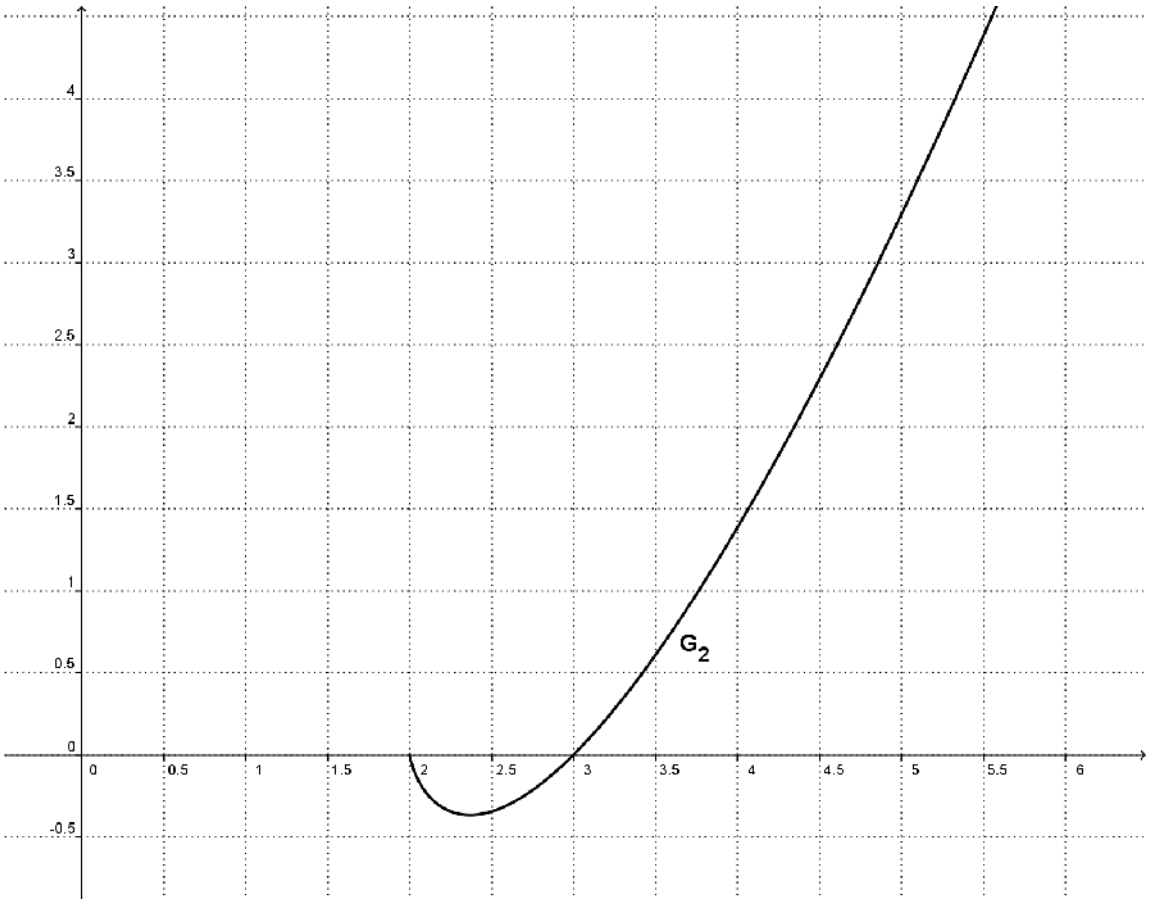
$= \ln(x-a) + 1$

$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-a) = -1$

$x - a = e^{-1}$

$x = \frac{1}{e} + a$

$f_a\left(\frac{1}{e} + a\right) = \left(\frac{1}{e} + a - a\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{e} + a - a\right)$

$= \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$

$\Rightarrow TP\left(\frac{1}{e} + a \,\middle|\, -\frac{1}{e}\right)$