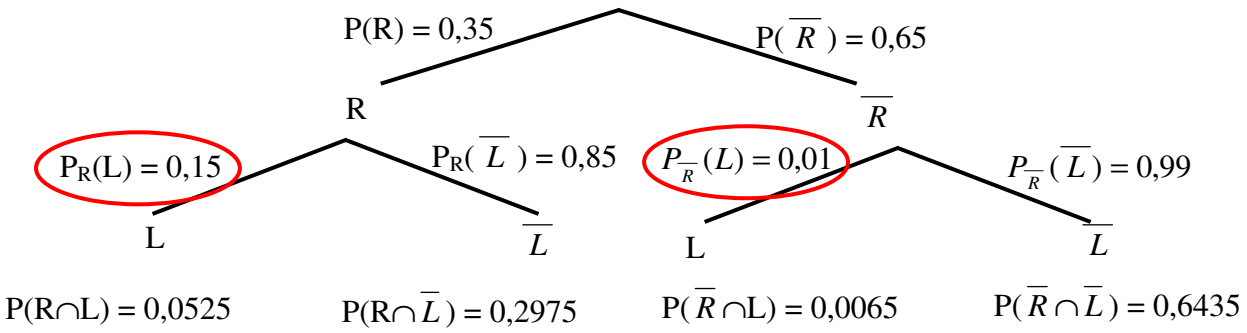
3. Stochastische (Un-)Abhängigkeit

Beispiel 1

35% der erwachsenen Bundesbürger rauchen (Ereignis R). Ein Raucher, der das Rauchen nicht aufgeben will oder kann, hat ein 15%-iges Lebenszeitrisiko Lungenkrebs (L) zu entwickeln. Im Gegensatz dazu liegt die Wahrscheinlichkeit Lungenkrebs zu bekommen, bei jemandem, der in seinem ganzen Leben weniger als 100 Zigaretten geraucht hat, bei unter einem 1 %. (Tagesspiegel, 03.04 2008).

Fertige ein Baumdiagramm und eine Vierfeldertafel an!

a) Baumdiagramm



b) Vierfeldertafel

	R	$\overline{R}$	
L	$P(R \cap L) = 0,0525$	$P(\overline{R} \cap L) = 0,0065$	$P(L) = 0,059$
$\overline{L}$	$P(R \cap \overline{L}) = 0,2975$	$P(\overline{R} \cap \overline{L}) = 0,6435$	$P(\overline{L}) = 0,941$
	$P(R) = 0,35$	$P(\overline{R}) = 0,65$	$P(\Omega) = 1$

Offensichtlich ist der Anteil der Lungenkrebserkrankungen unter den Rauchern mit 15% [vgl. Baumdiagramm $P_R(L)$] deutlich höher als der Anteil der Lungenkrebserkrankungen unter den Nichtrauchern mit 1% [vgl. Baumdiagramm $P_{\overline{R}}(L)$].

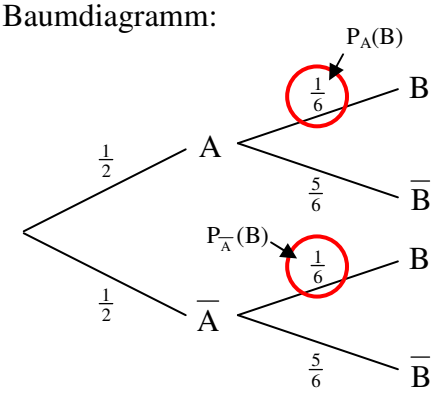
Ebenso unterscheiden sich die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_R(\overline{L})$ und $P_{\overline{R}}(\overline{L})$, d.h. die Wahrscheinlichkeit als Raucher nicht an Lungenkrebs zu erkranken unterscheidet sich von der Wahrscheinlichkeit, als Nichtraucher nicht an Lungenkrebs zu erkranken.

Somit hat das Eintreten des Ereignisses R einen Einfluss auf das Eintreten des Ereignisses L, man nennt die beiden Ereignisse **stochastisch abhängig**.

Beispiel 2

Ein Laplace-Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. Betrachtet werden die beiden Ereignisse
A: „Die erste gewürfelte Zahl ist gerade“
B: „ Die zweite gewürfelte Zahl ist eine Zwei“

Baumdiagramm:



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{12}$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{6} = \tfrac{5}{12}$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{12}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{6} = \tfrac{5}{12}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{6}$$

Es ist nicht überraschend, wenn man feststellt, dass das Eintreten des Ereignisses A keinen Einfluss auf das Eintreten des Ereignisses B hat und umgekehrt.

Man nennt die Ereignisse A und B **stochastisch unabhängig**.

Im Baumdiagramm sieht man dies daran, dass die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ und $P_{\overline{A}}(B)$ gleich sind.
Da A keinen Einfluss auf B nimmt, sind die Werte dieser bedingten Wahrscheinlichkeiten gleich der Wahrscheinlichkeit P(B) für das Eintreten von B:

$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = P(B)$. Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ergibt sich die folgende Bedingung für das Vorliegen stochastischer Unabhängigkeit:

$$P_A(B) = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn das Eintreten des Ereignisses A keinen Einfluss auf das Eintreten des Ereignisses B hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

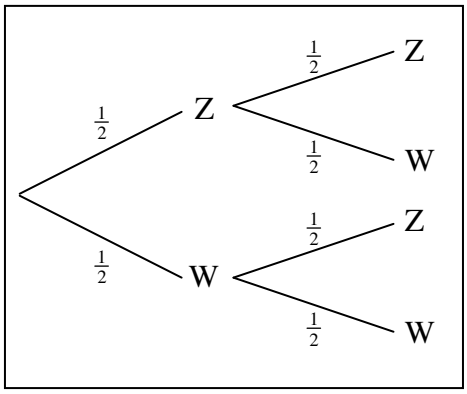
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Andernfalls heißen die Ereignisse stochastisch abhängig!

Beispiel 3

a) Zwei Münzen werden geworfen. Es seien folgende Ereignisse definiert:
A: „Es fällt höchstens einmal Zahl“
B: „Jede Seite fällt mindestens einmal“

Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse können mit einem geeigneten Baumdiagramm berechnet werden:



$P(A) = P(ZW, WZ, WW) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(B) = P(ZW, WZ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

$P(A \cap B) = P(ZW, WZ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

Es gilt: $\frac{1}{2} = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

Also sind die Ereignisse stochastisch abhängig.

b) Jetzt werden drei Münzen geworfen. A und B seien genau wie in a) definiert.

$A = \{ ZWW, WZW, WWZ, WWW \} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$B = \{ ZZW, ZWZ, WZZ, ZWW, WZW, WWZ \} \Rightarrow P(B) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$A \cap B = \{ ZWW, WZW, WWZ \} \Rightarrow P(A \cap B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$

Es gilt: $\frac{3}{8} = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

A und B sind in diesem Falle also stochastisch unabhängig!