# Weitere Ableitungsregeln

## 1. Umkehrbarkeit, Umkehrfunktion

*Eine Funktion f mit Definitionsmenge $D_f$ und Wertemenge $W_f$ heißt umkehrbar, falls es zu jedem y aus $W_f$ genau ein x aus $D_f$ mit f(x) = y gibt. Die Umkehrfunktion wird mit $f^{-1}$ bezeichnet.*

Die Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion sind zueinander symmetrisch bzgl. der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.
Die Definitionsmenge der Funktion f ist die Wertemenge der Umkehrfunktion $f^{-1}$ und die Wertemenge von f ist die Definitionsmenge von $f^{-1}$

*Bestimmen des Funktionsterms der Umkehrfunktion:*

a) Auflösen der Funktionsgleichung y = f(x) nach x.
b) Vertauschen der Variablen x und y, so dass nun $y = f^{-1}(x)$ gilt.

*Kriterium für Umkehrbarkeit:* Ist eine Funktion f streng monoton, so ist sie umkehrbar. Insbesondere ist jede differenzierbare Funktion f mit f'(x) > 0 (bzw. f'(x) < 0) für alle x in einem Intervall I, in diesem Intervall I umkehrbar.

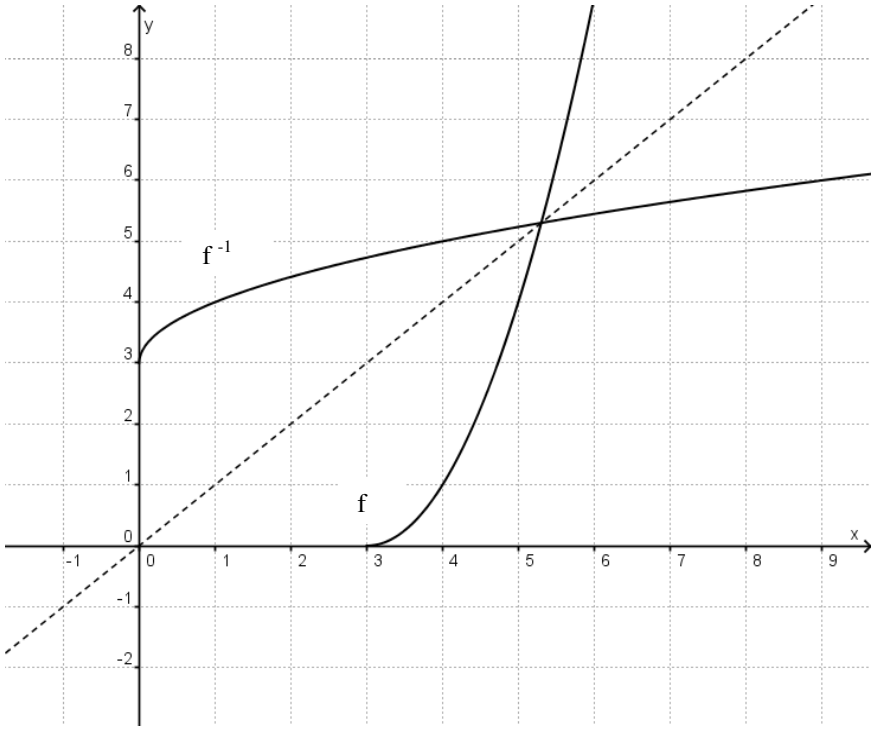
**Beispiel: $f(x) = (x-3)^2$ ist in $D_f = ]3;\infty[$** umkehrbar, da

- in diesem Intervall zu jedem y-Wert genau ein x-Wert gehört, die Funktion in diesem Intervall also eineindeutig ist.
- bzw. der Graph in diesem Intervall der Graph von f streng monoton steigt (f'(x) = 2x – 6 > 0 in diesem Intervall)

Berechnung des Terms von $f^{-1}$:

a) $y = (x-3)^2 \rightarrow \sqrt{y} = x - 3 \rightarrow x = \sqrt{y} + 3$

b) $y = \sqrt{x} + 3 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 3$ $\qquad D_{f^{-1}} = W_f = ]0;\infty[$



## 2. Verkettung von Funktionen und Ableitung verketteter Funktionen

*Für zwei Funktionen u(x) und v(x) heißt die Funktion u(v(x)) Verkettung oder Hintereinanderausführung der äußeren Funktion u und der inneren Funktion v (auch $u \circ v$ geschrieben). Im Allgemeinen gilt $u \circ v \neq v \circ u$*

Beispiele: a) $u(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ und $v(x) = \sin x$ → $u(v(x)) = \dfrac{2v(x)}{v(x)+1} = \dfrac{2\sin x}{\sin x + 1}$

b) Zerlegung von $f(x) = 3\sqrt{2+x^2}$ in die Funktionen $u(x) = 3\sqrt{x}$ und $v(x) = 2 + x^2$
Es gilt dann $f(x) = u \circ v = u(v(x))$

*Ist $f(x) = u \circ v = u(v(x))$ eine Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen u und v, so ist auch f differenzierbar und es gilt: $f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Kettenregel)*

Beispiele: a) $f(x) = u(v(x)) = \dfrac{2\sin x}{\sin x + 1}$ mit $u(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ und $v(x) = \sin x$

→ $u'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ und $v'(x) = \cos x$

→ $f'(x) = \dfrac{2}{(v(x)+1)^2} \cdot v'(x) = \dfrac{2}{(\cos x + 1)^2} \cdot \cos x$

b) $g(x) = 3\sqrt{2+x^2}$ mit $u(x) = 3\sqrt{x}$ und $v(x) = 2 + x^2$ → $u'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

→ $g'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{2+x^2}} \cdot 2x = \dfrac{3x}{\sqrt{2+x^2}}$

## 3. Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und deren Ableitung

*Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x^{\frac{p}{q}} = a\sqrt[q]{x^p}$ heißen Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten ($a \in R$, $p \in Z$, $q \in N$). Spezialfall: für p/q = ½ heißt die Funktion (Quadrat-) Wurzelfunktion*

*Für die Ableitung gilt: $f'(x) = a \cdot \dfrac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$*

Beispiel: $f(x) = 4 \cdot \sqrt[8]{x^3} = 4x^{\frac{3}{8}}$ → $f'(x) = 4 \cdot \dfrac{3}{8} x^{\frac{3}{8}-1} = \dfrac{3}{2} x^{-\frac{5}{8}}$

## 4. Ableitung von trigonometrischen Funktionen

*Für die Funktion f(x) = $\sin x$ gilt: f'(x) = $\cos x$, für g(x) = $\cos x$ gilt: g'(x) = $-\sin x$*

Beispiel: $f(x) = 4\sin x - 2\cos x$ → $f'(x) = 4\cos x + 2\sin x$