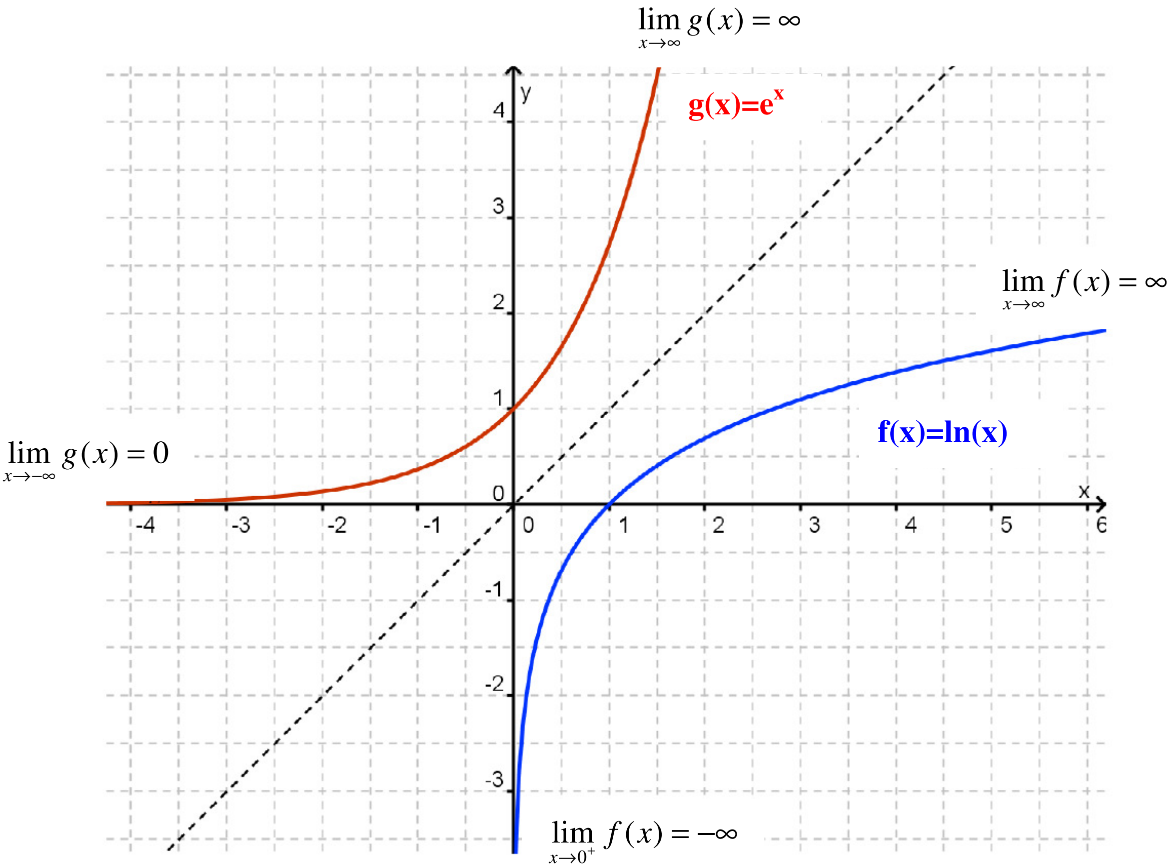
VI. Die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion



Da die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, ist sie umkehrbar.
Geometrisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten: y = x

> Definition: Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis e heißt **natürliche Logarithmusfunktion**.
> Es gilt: $g(x) = e^x \Rightarrow g^{-1}(x) = f(x) = \ln x$

Es gilt:

- $D_f = W_g = \mathbb{R}^+$
- $W_f = D_g = \mathbb{R}$
- $\ln(1) = 0$

Die Lösung x der Gleichung : $e^x = y$ ist demnach: $x = \ln y$

d.h. $e^{\ln x} = x$ oder auch $\ln e^x = x$

“Funktion und Umkehrfunktion heben sich gegenseitig auf“

Beispiele:

- $e^x = 5 \overset{\text{logarithmieren}}{\Leftrightarrow} \ln e^x = \ln 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$
- $e^{2x+1} = 1{,}5 \overset{\text{logarithmieren}}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow \ln e^{2x+1} = \ln 1{,}5 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln(1{,}5)$
  $\Leftrightarrow 2x = \ln(1{,}5) - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(1{,}5) - 1}{2}$
- $\ln 2x = 3 \overset{\text{auf beiden Seiten e-Funktion anwenden}}{\Leftrightarrow} e^{\ln 2x} = e^3$
  $\Leftrightarrow 2x = e^3 \Leftrightarrow x = 0{,}5\, e^3$

<u>Rechenregeln für den Logarithmus (s. Merkhilfe bzw. Formelsammlung):</u>

$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$ $\qquad$ $\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v$

$\ln u^z = z \ln u$

AUFGABEN:

Aufgabe 1: Leiten Sie ab:

a) $f(x) = \frac{2}{e^x}$

b) $f(x) = x^2 + e^{-2x}$

c) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

d) $f(x) = \ln(4x)$

e) $f(x) = \ln(4 - x)$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f:

a) $f(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

b) $f(x) = e^{2x} - 1$

c) $f(x) = e^x(e^x - 2)$

d) $f(x) = \ln(2x + 5)$

e) $f(x) = 5x \cdot \ln(x + 3)$

Aufgabe 3: Geben Sie eine Stammfunktion F von der Funktion f an:

a) $f(x) = 3 \cdot e^x$

b) $f(x) = 3 \cdot e^{-2x}$

c) $f(x) = 3 \cdot e^{2x+4}$

d) $f(x) = \frac{3}{4x + 7} + \frac{2}{e^x}$

Aufgabe 4: Kurvendiskussion

Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = 2x^2 \cdot e^{-x}$ hinsichtlich Definitionsmenge, Nullstellen, Grenzwerten, Schnittpunkt mit der y-Achse und Extremstellen. Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen bei x = 1 und zeichnen Sie den Graph von f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

LÖSUNGEN:

Aufgabe 1: Leiten Sie ab (Lösungen)

a) $f(x)=\dfrac{2}{e^x}$ $\qquad f(x)=\dfrac{2}{e^x}=2e^{-x} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=2e^{-x}\cdot(-1)=-2e^{-x}$

b) $f(x)=x^2+e^{-2x}$ $\qquad f'(x)=2x-2e^{-2x}$

c) $f(x)=x\cdot e^{-x}$ $\qquad f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

d) $f(x)=\ln(4x)$ $\qquad f'(x)=\dfrac{1}{4x}\cdot 4=\dfrac{1}{x}$

e) $f(x)=\ln(4-x)$ $\qquad f'(x)=\dfrac{-1}{4-x}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f (Lösungen)

a) $f(x)=e^{-x}-xe^{-x}$ $\qquad f(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$

b) $f(x)=e^{2x}-1$ $\qquad 0=e^{2x}-1 \quad \Rightarrow \quad 1=e^{2x} \quad \Rightarrow \quad \ln 1=2x \quad \Rightarrow \quad 0=x$

c) $f(x)=e^x(e^x-2)$ $\qquad 0=e^x(e^x-2) \quad \Rightarrow \quad 0=e^x-2 \quad \Rightarrow \quad x=\ln 2$

d) $f(x)=\ln(2x+5)$ $\qquad 0=\ln(2x+5) \quad \Rightarrow \quad 2x+5=1 \quad \Rightarrow \quad x=-4$

e) $f(x)=5x\cdot\ln(x+3)$ $\qquad 0=5x\cdot\ln(x+3) \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \qquad x_2=-2$

Aufgabe 3: Geben Sie eine Stammfunktion F von der Funktion f an (Lösungen)

a) $f(x)=3\cdot e^x$ $\qquad F(x)=3\cdot e^x$

b) $f(x)=3\cdot e^{-2x}$ $\qquad F(x)=-\dfrac{3}{2}\cdot e^{-2x}$

c) $f(x)=3\cdot e^{2x+4}$ $\qquad F(x)=\dfrac{3}{2}\cdot e^{2x+4}$

d) $f(x)=\dfrac{3}{4x+7}+\dfrac{2}{e^x}$ $\qquad F(x)=\dfrac{3}{4}\cdot\ln(4x+7)-2e^{-x}$

Aufgabe 4: Lösung

<u>Kurvendiskussion:</u> $\boxed{f(x) = 2x^2 \cdot e^{-x}}$

Definitionsmenge: D = R

Nullstellen: $f(x) = 2x^2 \cdot e^{-x} \overset{!}{=} 0$

$x_1 = 0$ $\qquad \neq 0$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 \cdot e^{-x} = 0$ (e-Funktion gewinnt)

Gegen $+\infty$ Gegen 0

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2 \cdot e^{-x} = +\infty$

Gegen $+\infty$ Gegen $+\infty$

Schnittpunkt mit der y-Achse: T(0/0)

Extremwerte: $f'(x) = 4x \cdot e^{-x} + 2x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 4x \cdot e^{-x} - 2x^2 \cdot e^{-x} = e^{-x} \cdot (4x - 2x^2) \overset{!}{=} 0$

$\neq 0$ $\qquad (4x - 2x^2) = 0$

$x(4 - 2x) = 0$

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$

Monotonietabelle:

		$x_1 = 0$		$x_2 = 2$	
f'	–		+		–
G_f	↘		↗		↘

TIP (0/0) HOP (2/1,1)

Tangente bei x = 1

Ansatz: y = mx + t

m = f'(1) = $\frac{2}{e} \approx 0{,}73$

y = f(1) = $\frac{2}{e} \approx 0{,}73$ Einsetzen: $0{,}73 = 0{,}73 \cdot 1 + t \quad \Rightarrow \quad$ t = 0

Tangente: y = 0,73 e

Graph: