Mathe-Wettbewerb am Siebold 2017

Klassen 10a, 10b,10c, 10d und 10e

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen euch die Mathelehrer des SGW!

Aufgabe 1

Der altmodische Jakub schreibt an seine 5 Freundinnen jeweils einen Liebesbrief, beschriftet die Briefumschläge und steckt, ohne weiter nachzudenken, jeden Brief in einen beschrifteten Umschlag. Leider landet nicht ein Liebesbrief im richtigen Briefumschlag. Wie wahrscheinlich ist dieses Ereignis?

Aufgabe 2

In einem Viereck ABCD ist S der Schnittpunkt der beiden Diagonalen.

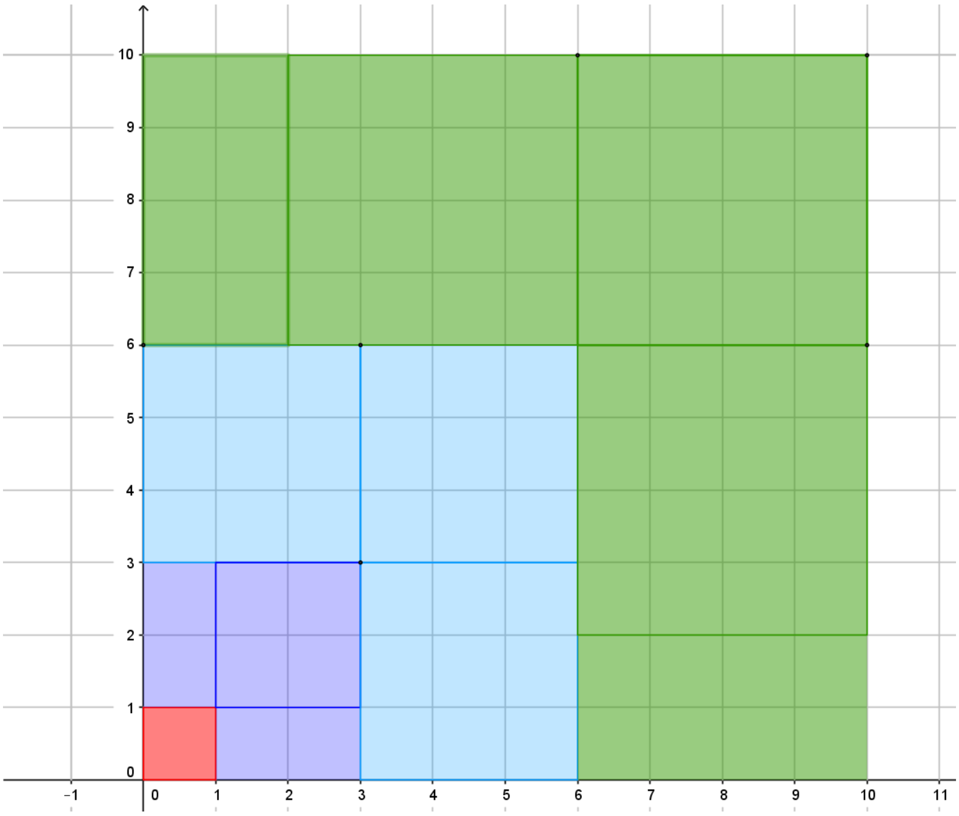
Zeigen Sie: Wenn S die Diagonale [AC] halbiert, dann halbiert die Diagonale [BD] die Fläche des Vierecks ABCD.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe der untenstehenden Abbildung, dass gilt:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$.

Wie können Sie daraus eine Formel für beliebige $n \in \mathbb{N}$ herleiten?



Viel Freude !!!

Lösungen:

1. Bezeichnen wir die Umschläge mit 1,2,3,4 und 5
   sowie die Briefe mit A, B, C, D und E
   Es gibt 5! Anordnungen = 120 der Briefe

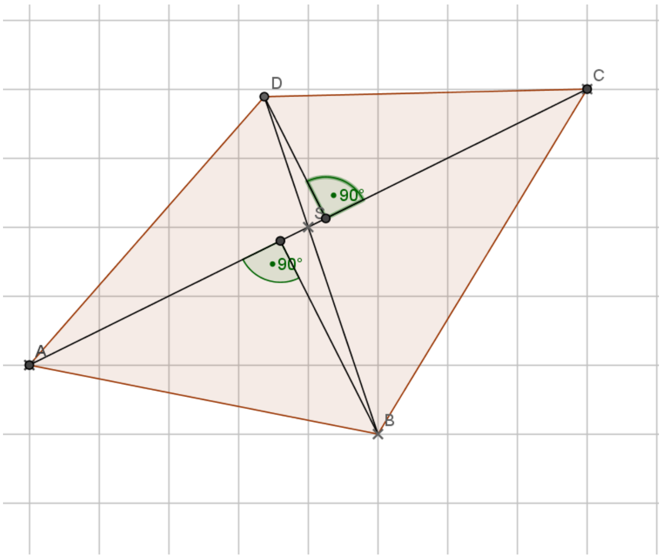
   a) Bei 4! = 24 Anordnungen ist der Brief A im richtigen Umschlag 1

   b) Bei 4! = 24 ist der Brief B im Umschlag 1:
   Darunter gibt es 6 Anordnungen bei denen Brief C im Umschlag 3 ist,
   weitere 4 Anordnungen bei denen Brief D im richtigen Umschlag ist, aber nicht C,
   weitere 3 Anordnungen, bei denen nur Brief E im richtigen Umschlag steckt!
   → 13 Anordnungen mit zumindest einer richtigen Adressatin

c) Anzahl der Lösungen aus b) · 3 = 39
Insgesamt sind also bei 24 + 4 · 13 = 76 Anordnungen zumindest ein Brief richtig adressiert

d) Das Ereignis, dass kein Brief richtig adressiert ist, hat also die Wahrscheinlichkeit
44/120 = 11/30 .
(vgl. Artikel über Subfakultäten in Wikipedia!)

2. Die Dreiecke ABS und BCS sind flächengleich, da sie gleich lange Grundseiten [AS] bzw. [SC] besitzen und die gleiche Höhe,
ebenso sind die Dreiecke ASD und SCD flächengleich.
Folglich gilt die Behauptung.



3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ \dots + \ (n-1)^3 + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$