



Mathe-Wettbewerb am Siebold 2017
Klassen 9a, 9b, 9c und 9d

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.
2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.
3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

Viel Spaß und Erfolg wünschen euch die Mathelehrer des SGW!

Aufgabe 1

Gegeben ist ein Dreieck ABC. Auf der Seite [BC] liegt der Punkt D so, dass der Winkel $BAD = 60^\circ$ ist und der Winkel $DAC = 20^\circ$. Auf der Seite [AC] liegt der Punkt E so, dass der Winkel $EBA = 50^\circ$ ist und der Winkel $DBE = 30^\circ$.
Bestimmt den Winkel EDA.

Tipp: Zeichnet einen Punkt B_2 auf [BC] ein, so dass das Dreieck ABB_2 gleichschenkelig ist.

Aufgabe 2: Gauß und weiter

- a) Der sehr junge Gauß sollte im Schulunterricht die Zahlen von 1 bis 100 addieren. Schnell hatte er die Lösung

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050 . \text{ Wie kam er auf diese Idee?}$$

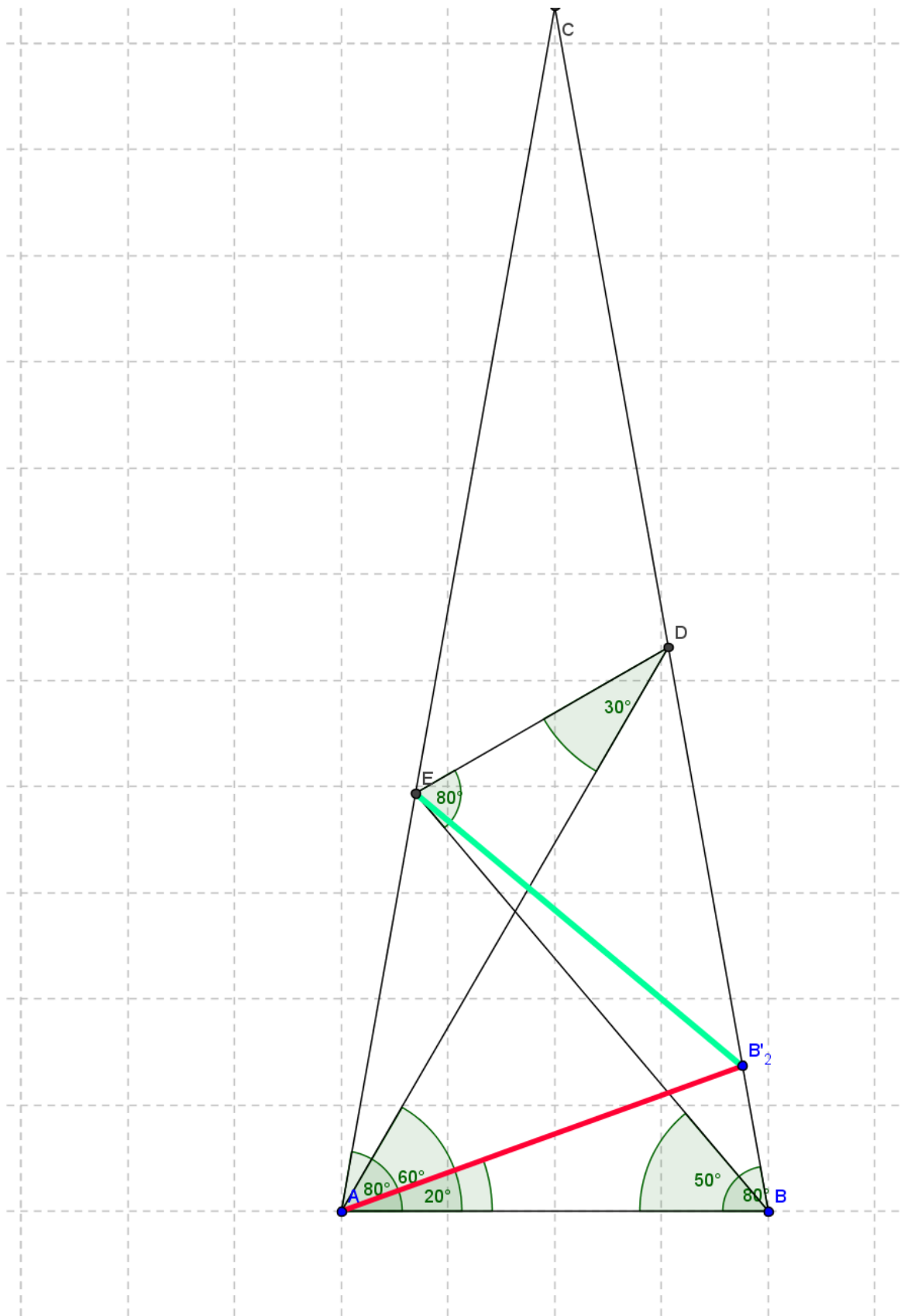
- b) Leonie bildet die Summe der ersten 316 geraden, paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen? Welchen Wert hat diese Summe?
- c) Jakob bildet die Summe von 335 paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen, deren Wert 100 000 ergibt. Wie viele ungerade Summanden muss die Summe mindestens enthalten?

Aufgabe 3: Orange

Jugendliche werden befragt, ob sie die Farbe orange mögen. Genau 2% aller Jungen ebenso 59 % aller Mädchen behaupten dies. Insgesamt mögen exakt 17 % aller befragten Jugendlichen die Farbe orange. Wie viele Jugendliche werden mindestens befragt?

Viel Freude !!

Lösung: zu Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

Zu c) In dieser Summe kommen mindestens 20 ungerade natürliche Zahlen vor.

Zu b) Wir benutzen die Formel für die ersten n natürlichen Zahlen

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

dazu die unmittelbar hieraus folgende Formel für die Summe der ersten n geraden Zahlen

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

und für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

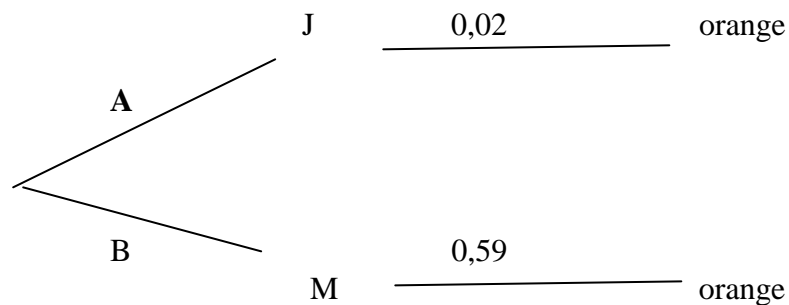
zu a): Die Summe der 316 kleinsten geraden Zahlen ist nach obiger Formel $316 \cdot 317 = 100\,172 > 100\,000$. Hieraus schließen wir, dass jede Summe mit 316 geraden positiven ganzen Zahlen größer ist als 100 000, d.h. in der geforderten Summe können sicher nicht mehr als 315 gerade Zahlen vorkommen. Demnach müssen mindestens $335 - 315 = 20$ ungerade Summanden vorkommen.

Tatsächlich gibt es eine solche Summe mit genau 20 ungeraden Zahlen: Es ist offensichtlich

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + 37 + 99 + 2 + 4 + 6 + \dots + 2 \cdot 315 \\ = 19^2 + 99 + 315 \cdot 316 = 361 + 99 + 99\,540 = 100\,000 \end{aligned}$$

eine Summe mit 20 ungeraden positiven Summanden und 315 geraden positiven Summanden, zusammen also 335 ganzen positiven Zahlen, und ihre Summe ist 100 000.

Aufgabe 3:



Anzahl der Jungen: A

Anzahl der Mädchen: B

Anzahl der Jugendlichen: N

Häufigkeit, dass befragte Jugendliche die Farbe orange mögen

$$\text{I) } A \cdot 0,02 + B \cdot 0,59 = 0,17 \cdot N$$

$$\text{II) } A + B = N \rightarrow B = N - A$$

$$\text{I') } A \cdot 0,02 + (N - A) \cdot 0,59 = 0,17 \cdot N$$

$$\rightarrow A \cdot 0,02 + N \cdot 0,59 - A \cdot 0,59 = 0,17 \cdot N$$

$$\rightarrow A \cdot (-0,57) = -0,42 \cdot N$$

$$\rightarrow A = \frac{42}{57}N = \frac{14}{19}N$$

N muss ein Vielfaches von 19 sein und außerdem ein Vielfaches von 100, da sonst $0,17 \cdot N$ keine ganze Zahl ist.

Folglich ist N ein Vielfaches von 1900;

N ist also mindestens 1900.