*Mathe-Wettbewerb am Siebold 2020*

***Klassen 8a, 8b, 8c und 8d***

Hinweise:

1. Wettbewerbsaufgaben sind keine Schulaufgaben. In der Regel benötigt man einige Zeit, bis das gestellte Problem ganz erfasst ist. Überlegt Euch Beispiele, zeichnet zuerst auf einem Überlegungsblatt oder bastelt vielleicht.

2. In der „Reinschrift“ Eurer Lösung kommt es auch darauf an, dass Ihr Euren Lösungsweg anschaulich beschreibt (Skizzen!), besonders geschickte Lösungsideen erklärt und logisch richtig und sprachlich gut darstellt.

3. Falls Ihr eine Aufgabe nicht vollständig lösen könnt, solltet Ihr wenigstens Eure Lösungsversuche beschreiben, da auch diese bei der Bewertung berücksichtigt werden, soweit sie für die Lösung brauchbar sind. Nicht verzagen!

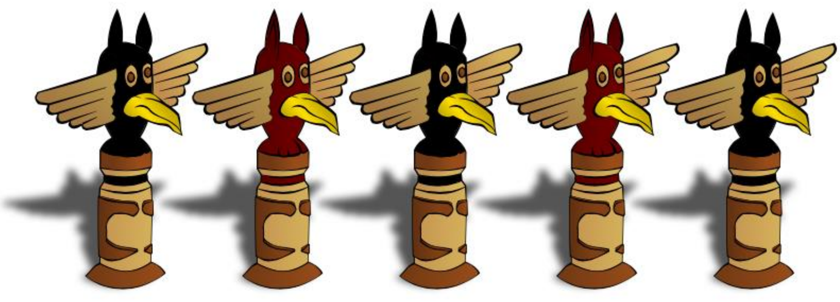
Viel Spaß und Erfolg wünschen Euch die Mathelehrer des SGW

**Aufgabe 1 – Am Marterpfahl (2+4 Punkte)**

Drei Forscher werden von einem Indianerstamm gefangen genommen. Mit verbundenen Augen werden sie hintereinander an drei Marterpfähle gebunden, die in einer Reihe stehen. Dann wird ihnen die Augenbinde wieder abgenommen. Der Indianerhäuptling sagt folgendes:

„Der Vordere von euch sieht keinen Marterpfahl, der Mittlere sieht nur den Marterpfahl des Vorderen und der Hintere kann nur die Marterpfähle der anderen beiden sehen. Wir besitzen fünf Marterpfähle: zwei rote und drei schwarze.“

a) Ermittelt die Anzahl der möglichen Anordnungen für die fünf Marterpfähle, wenn nur die Farbe unterscheiden wird.



Der Häuptling spricht weiter:

„Derjenige von euch, der mir die Farbe seines Marterpfahles sagen kann, wird freigelassen. Sollte er allerdings falsch liegen, so wird er getötet.“

Fünf Minuten vergehen ohne dass einer spricht, dann ruft der vordere Forscher, der keinen anderen Marterpfahl sehen kann: „Mein Pfahl ist schwarz!“. Daraufhin wird er freigelassen.

b) Erklärt genau, wie er das wissen konnte!

**Aufgabe 2 – Der neue Schatzmeister (4 Punkte)**

Der König sucht einen neuen Schatzmeister. Als Bewerber müsst ihr die folgende Aufgabe des Königs lösen:

„Vor euch steht eine Kiste. In dieser Kiste liegen Säcke. In jedem dieser Säcke befindet sich die gleiche Anzahl an Goldmünzen. Insgesamt sind zwischen 150 und 200 Goldmünzen in der Kiste. Es ist mehr als ein Sack in der Kiste und in jedem Sack ist mehr als eine Münze. Wenn ich euch die Gesamtanzahl der Münzen nennen würde, dann könntet ihr mir genau sagen, wie viele Säcke in der Kiste sind und wie viele Münzen in einem Sack sind.

Wie viele Goldmünzen sind insgesamt in der Kiste, wie viele Säcke sind in der Kiste und wie viele Münzen sind in jedem Sack?"

Dokumentiert eure Überlegungen genau!

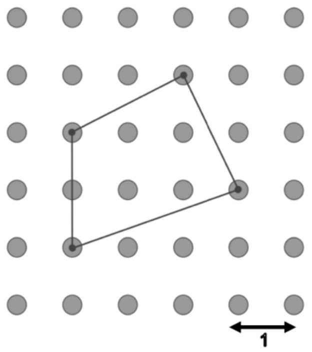
**Aufgabe 3 – Der Satz von Pick (3+2+2+3 Punkte)**

Haben die Eckpunkte eines Vielecks ganzzahlige Koordinaten, dann lässt sich der Flächeninhalt ergibt des Vielecks entweder durch Zerlegung in elementare Teilfiguren exakt und ohne Messung berechnen, oder man verwendet die Formel von Pick:

$$A = e_i + \frac{e_r}{2} - 1$$

Dabei ist $e_i$ die Anzahl der Gitterpunkte im inneren des Polygons und $e_r$ die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand des Polygons.

Der Flächeninhalt des abgebildeten Vierecks (links) lässt sich also wie folgt berechnen:

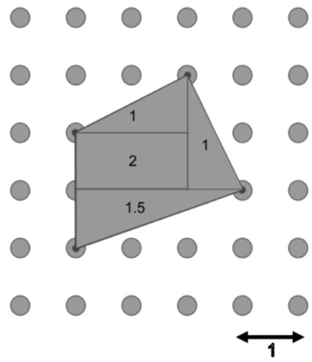



A) Durch Zerlegung (vgl. rechts):

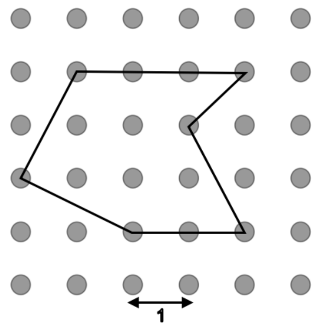
$$A = 1 + 1 + 2 + 1{,}5 = 5{,}5$$

B) Durch den Satz von Pick:

$$A = 4 + \frac{5}{2} - 1 = 5{,}5$$



a) Bestimmt den Flächeninhalt des nebenstehend abgebildeten Sechsecks sowohl durch Zerlegung in geeignete elementare Teilfiguren (einzeichnen und beschriften!), als auch mithilfe der Formel von Pick.




b) Begründet: Jedes Vieleck mit Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}$, dessen Ecken ganzzahlige Koordinaten hat, ist ein Dreieck.

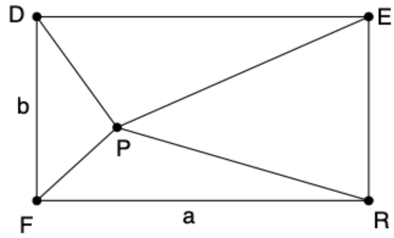
c) Spannt mit der App GeoBoard auf dem Tablet drei Dreiecke mit dem Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}$ auf. Die Dreiecke sollen nicht kongruent sein und mindestens eines soll keine Seite der Länge 1 besitzen. Fertigt einen Screenshot davon an.

d) Spannt mit der App GeoBoard auf dem Tablet drei verschiedene Vierecke mit dem Flächeninhalt $A = 7{,}5$ auf. Fertigt einen Screenshot davon an.

**Aufgabe 4 – Das Rechteck FRED (2+3+5 Punkte)**

Im Rechteck FRED mit den Seitenlängen a und b wird ein Punkt P so gewählt, dass die folgende Verhältnisgleichung für die Flächeninhalte der Teildreiecke gilt:

$$A_{\Delta\mathrm{PDF}} : A_{\Delta\mathrm{PFR}} : A_{\Delta\mathrm{PED}} = 1 : 2 : 3$$




a) Findet am Tablet mit der Software Geoboard durch Ausprobieren eine entsprechende Zerlegung für $a = b = 5$. Fertigt einen Screenshot davon an.

b) Findet am Tablet mit der Software Geoboard durch Ausprobieren eine entsprechende Zerlegung für $a \neq b$. Fertigt einen Screenshot davon an.

c) Ermittelt für die Situationen aus den Aufgaben a) und b) den Anteil des Dreiecks $\Delta PRE$ an der Rechtecksfläche. Zeigt, dass das Ergebnis für beliebige Werte von a und b gilt.

**Lösung:**

**Aufgabe 1**

a) Es gibt $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ Möglichkeiten

b) Er hat folgendes gedacht:

„Wenn mein Marterpfahl rot wäre, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Der Marterpfahl des mittleren Forschers ist ebenfalls rot. Dann hätte der hintere Forscher sofort gewusst, dass seiner schwarz sein muss.
2. Der Marterpfahl des mittleren Forschers ist schwarz. Dann hätte der hintere Forscher nicht sagen können, welche Farbe sein Marterpfahl hat. Aus diesem Schweigen hätte der mittlere Forscher schießen können, dass sein Marterpfahl schwarz ist.

Da beide schweigen muss mein Marterpfahl schwarz sein, denn dann kann keiner der beiden anderen wissen, welche Farbe sein eigener Marterpfahl hat."

**Aufgabe 2**

Formuliert man das Rätsel etwas anders, so wird der Lösungsweg deutlicher: Gesucht wird eine Zahl zwischen 150 und 200. Zerlegt man diese Zahl in das Produkt ihrer Primzahlen (Primfaktorzerlegung), so besteht dieses Produkt aus genau zwei identischen Primzahlen.

Mit anderen Worten: Gesucht wird eine Primzahl, deren Quadrat zwischen 150 und 200 liegt.

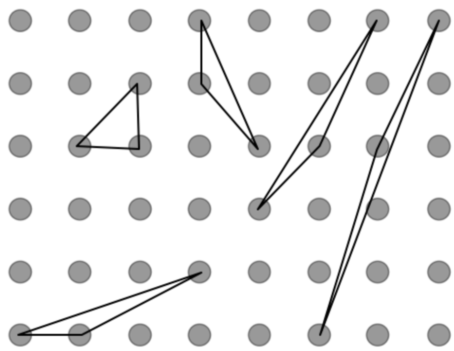
Die einzige Primzahl, die diese Bedingungen erfüllt ist 13: $13^2$ = 169. Also sind in der Kiste 13 Säcke mit je 13 Münzen. Insgesamt sind 169 Münzen in der Kiste.

**Aufgabe 3**

a) $A = 5 + \frac{9}{2} - 1 = 8{,}5$

b) Es ist $e_r$ mindestens 3, damit ist $A$ mindestens 0,5. Weitere innere Punkt oder Randpunkt würde den Flächeninhalt vergrößern, also handelt es sich immer um ein Dreieck

c) Siehe z. B. nebenstehende Abb.



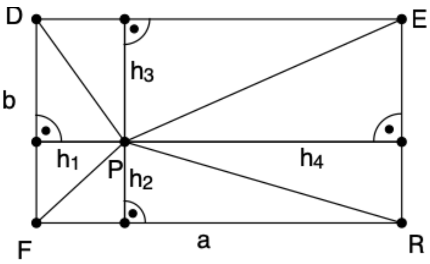
d) Individuell

## Aufgabe 4

a) $h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 3, h_4 = 4$

b) Individuell (z. B. a=10 und b=5)

c)




$A_1 = A(\Delta PFD)$ (A bedeutet Flächeninhalt)

$A_2 = A(\Delta PFR)$, $A_3 = A(\Delta PED)$, $A = A(FRED) = a \cdot b$

Es gilt $A_1 : A_2 : A_3 = 1:2:3$ . Daraus folgt:

$A_2 : A_3 = \left(\frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot a\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot h_3 \cdot a\right) = h_2 : h_3 = 2:3 \Rightarrow h_2 = \frac{2}{3} \cdot h_3$

$\Rightarrow h_2 + h_3 = \frac{5}{3} \cdot h_3 = b \Rightarrow h_3 = \frac{3}{5} \cdot b \Rightarrow h_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot b = \frac{2}{5} \cdot b$

$A_1 : A_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot b\right) : \left(\frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot a\right) = \left(h_1 \cdot b\right) : \left(h_2 \cdot a\right) = 1:2$

$\Rightarrow h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{2}{5} ba\right)}{b} = \frac{\frac{2}{5} ba}{2b} = \frac{1}{5} a \Rightarrow h_4 = a - h_1 = \frac{4}{5} a \Rightarrow A_{\Delta PRE} = \frac{1}{2} \cdot h_4 \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot ab = \frac{2}{5} \cdot A$,

d.h. der Anteil des Deiecks PRE an der Rechtecksfläche beträgt $\frac{2}{5}$.